FRAZIONI ALGEBRICHE

Definizione

Una **frazione algebrica** è un'espressione algebrica della forma $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}$, dove N e D sono due polinomi con $\mathrm{D} \neq 0$.

$\frac{2a^3b}{5x}$	$\frac{2ab^2}{a-b}$	$\frac{3x-6}{x-2}$

Casi particolari

$\frac{2x-y}{1} = 2x-y$	$\frac{0}{2x-y} = 0$	$\frac{2x-y}{0}$ Non esiste

Dominio di una frazione algebrica

Una frazione algebrica è definita solo per quei valori delle variabili che rendono il denominatore $D \neq 0$.

L'insieme dei valori che rendono il denominatore $D \neq 0$ è detto **dominio** o **insieme di esistenza**.

Esempi

$\frac{2a^3b}{5x}$	$\frac{2ab^2}{a-b}$	$\frac{3x-6}{x-2}$
C.E.: $x \neq 0$	C.E.: $a \neq b$	C.E.: $x \neq 2$

Semplificazione di una frazione algebrica

Per semplificare una frazione algebrica occorre:

1. scomporre in fattori numeratore e denominatore;
2. semplificare i fattori comuni.

Esempi

$$\frac{12x^2y^3}{20x^5y^2} = \frac{3y}{5x^3} \qquad C.E.: x \neq 0 \quad \wedge \quad y \neq 0$$

$$\frac{3x-6}{4x-8} = \frac{3\cdot(x-2)}{4\cdot(x-2)} = \frac{3}{4} \qquad C.E.: x \neq 2$$

$$\frac{x^2-2x}{x^2-4} = \frac{x\cdot(x-2)}{(x+2)\cdot(x-2)} = \frac{x}{x+2} \qquad C.E.: x \neq -2 \quad \wedge \quad x \neq +2$$

Moltiplicazione tra frazioni algebriche

Per effettuare la moltiplicazione tra due frazioni algebriche occorre:

1. scomporre in fattori numeratore e denominatore delle due frazioni;
2. determinare le condizioni di esistenza;
3. semplificare i fattori comuni;
4. moltiplicare fra loro i fattori rimasti a numeratore e moltiplicare i fattori rimasti a denominatore.

Esempio

$$\frac{x^2-2x}{x^2-4}\cdot\frac{x^2+4x+4}{x^3} = \frac{x\cdot(x-2)}{(x+2)\cdot(x-2)}\cdot\frac{(x+2)^2}{x^3} = \frac{x+2}{x^2} \qquad C.E.:\ x\neq 0\ \wedge\ x\neq -2\ \wedge\ x\neq +2$$

Divisione tra frazioni algebriche

Per effettuare la divisione tra due frazioni algebriche occorre:

1. scomporre in fattori numeratore e denominatore delle due frazioni;
2. determinare le condizioni di esistenza;
3. trasformare la divisione tra le due frazioni nella moltiplicazione della prima frazione per il reciproco della seconda frazione;
4. semplificare i fattori comuni;
5. moltiplicare fra loro i fattori rimasti a numeratore e moltiplicare i fattori rimasti a denominatore.

Esempio

$$\frac{x^2-2x}{x^2-4}:\frac{x^3}{x^2+4x+4} = \frac{x^2-2x}{x^2-4}\cdot\frac{x^2+4x+4}{x^3} =$$

$$= \frac{x\cdot(x-2)}{(x+2)\cdot(x-2)}\cdot\frac{(x+2)^2}{x^3} = \frac{x+2}{x^2} \qquad C.E.:\ x\neq 0\ \wedge\ x\neq -2\ \wedge\ x\neq +2$$

Potenza di una frazione algebrica

La potenza con un dato esponente intero positivo o nullo di una frazione algebrica è la frazione algebrica che ha per numeratore e per denominatore, rispettivamente, il numeratore e il denominatore della frazione algebrica originaria elevati a quella potenza.

Esempio

$$\left(\frac{3x^3}{x-5}\right)^2 = \frac{(3x^3)^2}{(x-5)^2} = \frac{9x^6}{(x-5)^2} \qquad C.E.:\ x\neq 5$$

Addizione e sottrazione di frazioni algebriche

L'addizione algebrica di frazioni algebriche si effettua in maniera analoga all'addizione algebrica di frazioni numeriche:

$$\frac{7}{3}-\frac{4}{10} = \frac{7}{3}-\frac{2}{5} = \frac{mcm(3\,;5):3\cdot 7 - mcm(3\,;5):5\cdot 2}{mcm(3\,;5)=15} = \frac{35-6}{15} = \frac{29}{15}$$

Pertanto, per effettuare l'addizione algebrica di frazioni algebriche occorre :

1. scomporre in fattori i termini delle frazioni;
2. determinare le condizioni di esistenza;
3. ridurre ai minimi termini le frazioni;
4. determinare il m.c.m. dei denominatori;
5. effettuare i calcoli come nelle frazioni numeriche *(vedi esempio numerico precedente);*
6. ridurre ai minimi termini la frazione algebrica ottenuta.

Esempio 1

$$\frac{7}{4a^3b}-\frac{5}{6a^2}+\frac{2}{c^5} = \qquad C.E.:\ a\neq 0 \ \wedge\ b\neq 0\ \wedge\ c\neq 0$$

$$= \frac{7\cdot 3c^5 - 5\cdot 2abc^5 + 2\cdot 12a^3b}{12a^3bc^5} = \frac{21c^5-10abc^5+24a^3b}{12a^3bc^5}\,.$$

Esempio 2

$$\frac{a-b}{a^2}+\frac{b-a}{b^2+ab}+\frac{a}{a^2+ab} = \qquad C.E.:\ a\neq 0\ \wedge\ b\neq 0\ \wedge\ a\neq -b$$

$$= \frac{a-b}{a^2}+\frac{b-a}{b\cdot(b+a)}+\frac{a}{a\cdot(a+b)} = \frac{b\cdot(a+b)\cdot(a-b)+a^2\cdot(b-a)+a\cdot ab}{a^2b\cdot(a+b)} =$$

$$= \frac{b\cdot(a^2-b^2)+a^2b-a^3+a^2b}{a^2b\cdot(a+b)} = \frac{a^2b-b^3+a^2b-a^3+a^2b}{a^2b\cdot(a+b)} = \frac{3a^2b-b^3-a^3}{a^2b\cdot(a+b)}\,.$$

Esempio 3

$$\frac{3ab^2}{ab+b^2}+\frac{5}{5a^2-5b^2} = \qquad C.E.:\ b\neq 0\ \wedge\ a\neq b\ \wedge\ a\neq -b$$

$$= \frac{3ab^2}{b\cdot(a+b)}+\frac{5}{5\cdot(a^2-b^2)} = \frac{3ab}{(a+b)}+\frac{1}{(a+b)\cdot(a-b)} = \frac{3ab\cdot(a-b)+1}{(a+b)\cdot(a-b)} = \frac{3a^2b-3ab^2+1}{(a+b)\cdot(a-b)}\,.$$

Esempio 4

$$\frac{5}{3x+3}-\frac{2x}{x^2-1}-\frac{6}{3-3x} = \qquad C.E.:\ \ x \neq -1 \ \ \wedge \ \ x \neq +1$$

$$\frac{5}{3\cdot(x+1)}-\frac{2x}{(x+1)\cdot(x-1)}-\frac{6}{3\cdot(1-x)} = \frac{5}{3\cdot(x+1)}-\frac{2x}{(x+1)\cdot(x-1)}-\frac{2}{-(x-1)} =$$

$$= \frac{5}{3\cdot(x+1)}-\frac{2x}{(x+1)\cdot(x-1)}+\frac{2}{x-1} = \frac{5\cdot(x-1)-3\cdot 2x+2\cdot 3\cdot(x+1)}{3\cdot(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{5x-5-6x+6x+6}{3\cdot(x+1)\cdot(x-1)} =$$

$$= \frac{5x+1}{3\cdot(x+1)\cdot(x-1)} =$$

Esempio 5

$$a-\frac{3a}{a^3-1}-\frac{a^3-a^2}{a^2+a+1} = \qquad C.E.:\ \ a \neq +1$$

$$= a-\frac{3a}{(a-1)\cdot(a^2+a+1)}-\frac{a^2\cdot(a-1)}{a^2+a+1} = \frac{a\cdot(a-1)\cdot(a^2+a+1)-3a-a^2\cdot(a-1)\cdot(a-1)}{(a-1)\cdot(a^2+a+1)} =$$

$$= \frac{a\cdot(a^3-1)-3a-a^2\cdot(a^2+1-2a)}{(a-1)\cdot(a^2+a+1)} = \frac{a^4-a-3a-a^4-a^2+2a^3}{(a-1)\cdot(a^2+a+1)} = \frac{2a^3-a^2-4a}{(a-1)\cdot(a^2+a+1)} =$$

$$= \frac{a\cdot(2a^2-a-4)}{(a-1)\cdot(a^2+a+1)} \ .$$

Esempio 6

$$\frac{b^2-7+10}{b^3-6b^2+12b-8}+\frac{b+1}{b^2-4b+4}-\frac{1}{b-2} = \qquad C.E.:\ \ b \neq +2$$

$$= \frac{(b-2)\cdot(b-5)}{(b-2)^3}+\frac{b+1}{(b-2)^2}-\frac{1}{b-2} = \frac{b-5}{(b-2)^2}+\frac{b+1}{(b-2)^2}-\frac{1}{b-2} = \frac{b-5+b+1-(b-2)}{(b-2)^2} =$$

$$= \frac{b-5+b+1-b+2}{(b-2)^2} = \frac{b-2}{(b-2)^2} = \frac{1}{b-2} \ .$$

Esempio 7

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{2}{a-1}+\frac{1}{a+1}\right)\cdot\frac{a^2-1}{3a+1} \qquad C.E.:\ \ a \neq 0 \ \ \wedge \ \ a \neq -1 \ \ \wedge \ \ a \neq +1 \ \ \wedge \ \ a \neq -\frac{1}{3}$$

$$= \frac{(a+1)\cdot(a-1)-2a\cdot(a+1)+a\cdot(a-1)}{a\cdot(a+1)\cdot(a-1)}\cdot\frac{(a+1)\cdot(a-1)}{3a+1}$$

$$= \frac{a^2-1-2a^2-2a+a^2-a}{a\cdot(a+1)\cdot(a-1)}\cdot\frac{(a+1)\cdot(a-1)}{3a+1} =$$

$$= \frac{-3a-1}{a\cdot(a+1)\cdot(a-1)}\cdot\frac{(a+1)\cdot(a-1)}{3a+1} = \frac{-(\cancel{3a+1})}{a\cdot\cancel{(a+1)}\cdot\cancel{(a-1)}}\cdot\frac{\cancel{(a+1)}\cdot\cancel{(a-1)}}{\cancel{3a+1}} = -\frac{1}{a} \ .$$