FATTORIZZAZIONE DI UN POLINOMIO

Così come avviene con i numeri ($180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$), la fattorizzazione di un polinomio è la scomposizione di un polinomio in un prodotto di due o più polinomi. Esempio: $x^4 - y^4 = (x^2 + y^2) \cdot (x + y) \cdot (x - y)$

Un polinomio si dice **riducibile** se si può scomporre nel prodotto di due o più fattori di grado minore. In caso contrario, il polinomio si dice **irriducibile**.

Per eseguire la fattorizzazione di un polinomio occorre applicare, in ordine, i seguenti metodi:

1 - Raccoglimento a fattor comune totale

Questo metodo si applica quando il M.C.D. dei monomi che compongono il polinomio è diverso da 1.

Il polinomio è scomposto in due fattori :

- il I° fattore è il M.C.D. dei monomi che compongono il polinomio;
- il II° fattore è un polinomio costituito dai quozienti ottenuti dividendo ciascun termine del polinomio per il M.C.D.

Esempio $12a^2x^5 + 15a^3bx^3 - 18a^4cx^4 = 3a^2x^3 \cdot (4x^2 + 5ab - 6a^2cx)$

Calcoli : $\dfrac{12a^2x^5}{3a^2x^3} = 4x^2$ $\qquad \dfrac{15a^3bx^3}{3a^2x^3} = 5ab$ $\qquad \dfrac{-18a^4cx^4}{3a^2x^3} = -6a^2cx$

2 - Raccoglimento a fattor comune parziale

Questo metodo potrebbe essere applicato quando il polinomio presenta fattori comuni solo per gruppi di monomi.
Il metodo risulta applicabile se è possibile completare le seguenti due fasi:

- I^a fase: si applica il raccoglimento a fattor comune a gruppi di due (o tre) monomi;
- II^a fase: si raccolgono a fattor comune totale i polinomi (in parentesi) ottenuti.

Esempio $\underbrace{14ax - 4a}_{2\,a} + \underbrace{35bx - 10b}_{5\,b} = \boxed{2a \cdot (7x - 2)} + \boxed{5b \cdot (7x - 2)} = (7x - 2) \cdot (2a + 5b)$

3 - Prodotti Notevoli

a. Differenza di due quadrati $I^2 - II^2 = (I + II) \cdot (I - II)$

Questa regola si applica quando il polinomio è la differenza di due monomi che hanno:

- per coefficienti, numeri quadrati perfetti: 1 , 4 , 9 , 16 , 25 , 36 , 49 , 64 , 81 , 100 , 121 , 144 , . . . $\frac{1}{4}$, $\frac{9}{25}$, $0{,}01 = \frac{1}{100}$, $0{,}04 = \frac{4}{100}$, . . .
- per parte letterale, lettere con esponenti pari: a^2 , b^8 , x^4y^6 , $a^4b^2x^{14}$, . . .

Esempio $49x^4 - 36y^6 = (7x^2 + 6y^3) \cdot (7x^2 - 6y^3)$

I termini nelle parentesi si ottengono estraendo le radici quadrate dei due monomi del polinomio traccia .

b. Differenza di due cubi $\quad I^3 - II^3 = (I - II) \cdot (I^2 + I \cdot II + II^2)$

Questa regola si applica quando il polinomio è la differenza di due monomi che hanno:

- per coefficienti, numeri cubi perfetti:
  $1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, \ldots \frac{1}{8}, \frac{27}{64}, 0{,}001 = \frac{1}{1000}, 0{,}08 = \frac{8}{1000}$
- per parte letterale, lettere con esponenti multipli del 3: $a^3, \quad b^{12}, \quad x^9y^6, \quad a^6b^3x^{15}, \ldots$

Esempio $\quad \frac{64}{27}x^9 - y^6 = \left(\frac{4}{3}x^3 - y^2\right) \cdot \left(\frac{16}{9}x^6 + \frac{4}{3}x^3y^2 + y^4\right)$

I termini della I^a parentesi si ottengono estraendo le radici cubiche dei due monomi del polinomio traccia. Es. $\sqrt[3]{y^6} = y^2$.

I termini della II^a parentesi si ottengono effettuando il falso quadrato $I^2 + I \cdot II + II^2$ della I^a parentesi.

c. Somma di due cubi $\quad I^3 + II^3 = (I + II) \cdot (I^2 - I \cdot II + II^2)$ *(vedi regola precedente)*

d. Quadrato di un binomio $\quad I^2 + II^2 \pm 2 \cdot I \cdot II = (I \pm II)^2$

Questa regola si applica quando il polinomio è un trinomio contenente:

- due monomi quadrati perfetti, come ad esempio: $\frac{49}{121}x^4, \quad 1, \quad \frac{a^6}{9}, \quad \frac{4}{25}x^2y^4z^6, \ldots$
- un terzo monomio che risulta essere il doppio prodotto delle radici quadrate dei due monomi quadrati perfetti.

Esempio $\quad \frac{49}{\underline{\underline{121}}}x^4 - \frac{14}{11}x^2y^3 \underline{\underline{+y^6}} = \left(\frac{7}{11}x^2 - y^3\right)^2$

I termini nella parentesi si ottengono estraendo le radici quadrate dei due monomi quadrati perfetti.

È consigliabile effettuare la verifica del doppio prodotto: $2 \cdot I \cdot II = 2 \cdot \frac{7}{11}x^2 \cdot (-y^3) = -\frac{14}{11}x^2y^3$

e. Cubo di un binomio $\quad I^3 + II^3 + 3 \cdot I^2 \cdot II + 3 \cdot I \cdot II^2 = (I + II)^3$

Questa regola si applica quando il polinomio è un quadrinomio contenente:

- due monomi cubi perfetti, come ad esempio: $\frac{1}{8}a^3, \quad 1, \quad -\frac{8}{27}x^9y^6, \quad -\frac{a^6b^3x^{15}}{64}, \ldots$
- due monomi che risultano essere i tripli prodotti

Esempio: $\quad \underline{\underline{8x^9}} - 12x^6y^2 + 6x^3y^4 \underline{\underline{-y^6}} = (2x^3 - y^2)^3$

I termini nella parentesi si ottengono estraendo le radici cubiche dei due monomi. Es. $\sqrt[3]{8x^9} = 2x^3$.
È consigliabile effettuare la verifica dei due tripli prodotti:
$3 \cdot I^2 \cdot II = 3 \cdot (2x^3)^2 \cdot (-y^2) = -12x^6y^2 \qquad 3 \cdot I \cdot II^2 = 3 \cdot 2x^3 \cdot (-y^2)^2 = +6x^3y^4$

f. Quadrato di un trinomio $\quad I^2 + II^2 + III^2 + 2 \cdot I \cdot II + 2 \cdot I \cdot III + 2 \cdot II \cdot III = (I + II + III)^2$

Questa regola si applica quando il polinomio è formato da sei termini, di cui:

- tre sono monomi quadrati perfetti, come : $\frac{49}{121}x^4, \quad y^6, \quad 1, \quad \frac{a^6}{9}, \quad \frac{4}{25}x^2y^4z^6$
- tre sono monomi che risultano essere i doppi prodotti $2 \cdot I \cdot II$, $2 \cdot I \cdot III$, $2 \cdot II \cdot III$ delle radici quadrate dei quadrati perfetti.

Esempio $\quad \underline{\underline{9a^2}} - 6ab - 6ac \underline{\underline{+b^2}} \underline{\underline{+c^2}} + 2bc = (3a - b - c)^2$

I termini nella parentesi si ottengono estraendo le radici quadrate dei monomi quadrati perfetti.
È consigliabile effettuare la verifica dei tre doppi prodotti:
$2 \cdot I \cdot II = 2 \cdot 3a \cdot (-b) = -6ab \qquad 2 \cdot I \cdot III = 2 \cdot 3a \cdot (-c) = -6ac \qquad 2 \cdot II \cdot III = 2 \cdot (-b) \cdot (-c) = +2bc$

4 - Trinomio di II° grado

Questa regola si applica, in generale, in presenza di un trinomio di II° grado in una data lettera.

<u>I Caso</u> - Il coefficiente della x^2 è uguale a 1.

Il polinomio si decompone nel prodotto dei due binomi:

$x^2 + sx + p = (x + a) \cdot (x + b)$ dove **s** = a + b **p** = a • b

Esempio $x^2 - 4x - 12$

Occorre trovare due numeri il cui prodotto sia uguale al termine noto **p = –12**

e la cui somma sia uguale al coefficiente della x **s = –4**.

Per fare ciò costruiamo la seguente tabella a fianco.

Dalla tabella si individuano i numeri cercati: +2 e –6 .

Pertanto il polinomio di scompone in $x^2 - 4x - 12 = (x + 2) \cdot (x - 6)$

p = -12		**s = -4**
-1	+12	+11
+1	-12	-11
-2	+6	+4
+2	-6	-4
-3	+4	+1
+3	-4	-1

<u>II Caso</u> - Il coefficiente della x^2 è diverso da 1.

Per scomporre il polinomio $nx^2 + sx + m$ occorre:

- trovare due numeri a e b tali che $a + b = s$ e $a \cdot b = n \cdot m$
- riscrivere il polinomio come $nx^2 + ax + bx + m$
- effettuare il raccoglimento a fattor comune parziale.

Esempio $2x^2 - 7x + 5$

Occorre trovare due numeri a e b tali che $a + b = -7$ e $a \cdot b = 2 \cdot 5 = 10$

Per fare ciò costruiamo la seguente tabella a lato.

Dalla tabella si individuano i numeri cercati: –2 e –5.

Pertanto il polinomio si riscrive come: $2x^2 - 2x - 5x + 5$

Effettuando il raccoglimento parziale si ha $2x \cdot (x-1) - 5 \cdot (x-1)$

Raccogliendo la parentesi comune si ottiene $(x-1) \cdot (2x-5)$

p = 10		**s = -7**
+1	+10	+11
-1	-10	-11
+2	+5	+7
-2	-5	-7

5 - Regola di Ruffini

Questo metodo si applica, in genere, in presenza di un polinomio in una data lettera:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

Per scomporre il polinomio occorre:

- ordinare il polinomio secondo le potenze decrescenti della lettera
- determinare i divisori del termine noto $\boldsymbol{a_n}$ e del termine di grado massimo $\boldsymbol{a_0}$.
- ricercare uno zero $\boldsymbol{\alpha}$ del polinomio nell'insieme: $D = \left\{ \pm \frac{p}{q} \;\; \textit{con p divisore di } a_n \;\; \textit{e} \;\; \textit{q divisore di } a_0 \right\}$
- scomporre il polinomio con la regola di Ruffini:
  $(x-\alpha)\cdot(b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}x + b_n)$ con: b_1 , b_2 , … , b_{n-1} , b_n ottenuti dalla griglia di Ruffini.

Esempio

Dato il polinomio ordinato $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$

I divisori del termine noto 12 sono: ±1 , ±2 , ±3 , ±4 , ±6 , ±12
I divisori del I° coefficiente 1 sono: ±1
I possibili zeri del polinomio sono D = {±1 , ±2 , ±3 , ±4 , ±6 , ±12}
Con la griglia di Ruffini si cerca uno zero del polinomio

	1	-7	+16	-12
+1		+1	-6	+10
	1	-6	+10	≠ 0

	1	-7	+16	-12
-1		-1	+8	-24
	1	-8	+24	≠ 0

	1	-7	+16	-12
+2		+2	-10	+12
	1	-5	+6	0

Il polinomio $x^3 - 7x^2 + 16x - 12 \;\; = \;\; (x-2)\cdot(1x^2 - 5x + 6\,)$

Il polinomio della seconda parentesi, essendo di II° grado, potrebbe fattorizzarsi ancora con Ruffini:

Fattorizzazione di un polinomio

(Sintesi)

Binomio

La scomposizione in fattori di un binomio può avvenire con :

A. *Raccoglimento a fattor comune totale* : $ax - ay = a \cdot (x - y)$

B. *Differenza di due quadrati* : $I^2 - II^2 \;=\; (I + II) \cdot (I - II)$

C. *Differenza di due cubi* : $I^3 - II^3 \;=\; (I - II) \cdot (I^2 + \; I \cdot II + II^2)$

D. *Somma di due cubi* : $I^3 + II^3 \;=\; (I + II) \cdot (I^2 - \; I \cdot II + II^2)$

E. *Regola di Ruffini*

F. *L'uso misto del procedimento "A" con i procedimenti "B" , "C" , "D" , "E".*

Trinomio

La scomposizione in fattori di un trinomio può avvenire con :

A. *Raccoglimento a fattor comune totale :* $ax - ay + az = a \cdot (x - y + z)$

B. *Quadrato di un binomio :* $I^2 + II^2 \pm 2 \cdot I \cdot II \;=\; (I \pm II)^2$

C. *Trinomio di II° grado :* $x^2 + sx + p = (x + a) \cdot (x + b)$

D. *Regola di Ruffini*

E. *L'uso misto del procedimento "A" con uno dei procedimenti "B" , "C" , "D"*

Quadrinomio

La scomposizione in fattori di un quadrinomio può avvenire con :

A. *Raccoglimento a fattor comune totale :* $ax - ay + az - ak = a \cdot (x - y + z - k)$

B. *Raccoglimento parziale :* $ax - ay + bx - by = a \cdot (x - y) + b \cdot (x - y) = (x - y) \cdot (a + b)$

C. *Cubo di un binomio :* $I^3 + II^3 + 3 \cdot I^2 \cdot II + 3 \cdot I \cdot II^2 \;=\; (I + II)^3$

D. *Regola di Ruffini*

E. *L'uso misto del procedimento "A" con i procedimenti "B", "C", "D".*

Polinomio con sei termini

La scomposizione in fattori può avvenire con :

A. *Raccoglimento a fattor comune totale*

B. *Raccoglimento parziale :*

C. *Quadrato di un trinomio*

D. *Regola di Ruffini*

E. *L'uso misto del procedimento "A" con i procedimenti "B", "C", "D".*