Teorema di Cramer

Dato il sistema lineare di due equazioni in due incognite $\begin{cases} \boldsymbol{a\,x + b\,y = c} \\ \boldsymbol{a'x + b'y = c'} \end{cases}$		
Se $\boldsymbol{D \neq 0}$	il sistema è ***determinato*** e ha soluzione $\left(\boldsymbol{x = \frac{D_x}{D}} \;\; ; \;\; \boldsymbol{y = \frac{D_y}{D}}\right)$	
Se $\boldsymbol{D = 0}$	il sistema è :	***indeterminato*** se $\boldsymbol{D_x = 0} \;\; \wedge \;\; \boldsymbol{D_y = 0}$ ***impossibile*** se $\boldsymbol{D_x \neq 0} \;\; \vee \;\; \boldsymbol{D_y \neq 0}$

Con $\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a'} & \boldsymbol{b'} \end{vmatrix}$ determinante del sistema

$\boldsymbol{D_x} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{c} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c'} & \boldsymbol{b'} \end{vmatrix}$ determinante relativo all'incognita $\boldsymbol{x}$ del sistema

$\boldsymbol{D_y} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a'} & \boldsymbol{c'} \end{vmatrix}$ determinante relativo all'incognita $\boldsymbol{y}$ del sistema

Dimostrazione

Supponiamo, per semplicità, che i coefficienti a, a', b, b' del sistema lineare siano tutti diversi da zero.
Applichiamo quindi il metodo di addizione e sottrazione :

Moltiplicando i due membri della prima equazione per b' e i due membri della seconda equazione per b : $\begin{cases} ab'\,x + bb'\,y = b'c \\ a'b\,x + bb'y = bc' \end{cases}$ *Sottraendo membro a membro si ottiene:* $ab'x - a'b\,x = b'c - bc'$ *da cui si ricava:* $(ab' - a'b\,)x = b'c - bc'$	*Moltiplicando i due membri della prima equazione per a' e i due membri della seconda equazione per a :* $\begin{cases} aa'\,x + a'b\,y = a'c \\ aa'\,x + ab'\,y = ac' \end{cases}$ *Sottraendo la prima equazione dalla seconda si ottiene:* $ab'y - a'b\,y = ac' - a'c$ *da cui si ricava:* $(ab' - a'b\,)y = ac' - a'c$

Se $ab' - a'b \neq 0$ *si ottengono le due espressioni*	
$x = \dfrac{b'c - bc'}{ab' - a'b} = \dfrac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \dfrac{D_x}{D}$	$y = \dfrac{ac' - a'c}{ab' - a'b} = \dfrac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \dfrac{D_y}{D}$
il sistema è determinato	

Se invece $ab' - a'b = 0$			
Se $b'c - bc' = 0$	$\wedge$	$ac' - a'c = 0$	*entrambe le equazioni del sistema sono indeterminate* $\Rightarrow$ *S. indeterminato*
Se $b'c - bc' \neq 0$	$\vee$	$ac' - a'c \neq 0$	*una delle due equazioni del sistema è impossibile* $\Rightarrow$ *S. impossibile.*

Il risultati ottenuti, supponendo che a, a', b, b' siano diversi da zero, possono essere dimostrati anche per i casi in cui qualcuno di questi coefficienti è nullo.

Esempio

$\begin{cases} 4x - 5y = 3 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$ $\left(\boldsymbol{x = \frac{D_x}{D} = \frac{46}{23} = 2}\;;\;\; \boldsymbol{y = \frac{D_y}{D} = \frac{23}{23} = 1}\right)$

$D \;=\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 3 \cdot (-5) = 8 + 15 = 23$

$D_x = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 8 \cdot (-5) = 6 + 40 = 46$ $D_y = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot 8 - 3 \cdot 3 = 32 - 9 = 23$