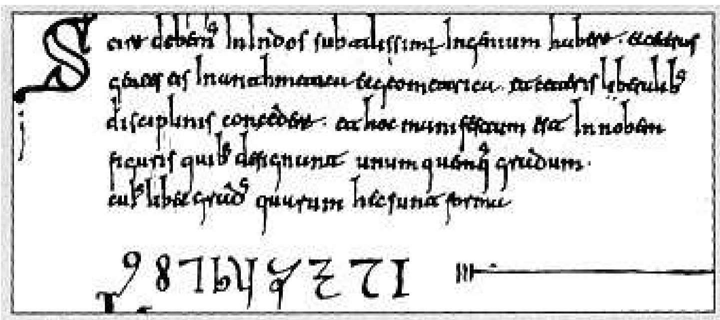
SISTEMI DI NUMERAZIONE

L'evoluzione dei numeri indo-arabi: dal mille d.C. (in alto) all'Italia del 1400 (ultima serie in basso).

Il problema fondamentale della numerazione è sempre stato quello di rappresentare con un numero limitato di segni particolari, detti cifre, l'infinità dei numeri. Come noto, noi usiamo un sistema decimale, con 10 cifre-base che vanno da 0 a 9. Il numero 0, chiamato dagli arabi "vuoto" e dagli orientali "circolo", fu introdotto in Italia dal pisano Leonardo Fibocacci, nel 1223, col nome che dura ancora oggi e che proviene da "zefiro" (dolce venticello). Insomma, fu con l'uso della numerazione scritta posizionale arabica, che, a sua volta, rifletteva quella indiana, che l'Europa aveva scoperto la grande importanza dello zero.

Ora, nel nostro sistema decimale, dieci unità del primo ordine formano una decina, che costituisce una unità del secondo ordine; 10 unità del secondo ordine formano un centinaio, che costituisce una unità del terzo ordine, ecc. Per cui abbiamo: $1=10^0$, $10=10^1$, $100=10^2$, $1000=10^3$...

Così, ad es.: 298 = 8 unità del primo ordine, 9 unità (decine) del secondo ordine, 2 unità (centinaia) del terzo ordine. 298 si può anche scrivere così: $2x100 + 9x10 + 8x1 = 2x10^2 + 9x10^1 + 8x10^0$.



La più antica indicazione delle nostre cifre trovata in Europa.

Si poteva però scegliere un sistema di numerazione a base 5, cioè da 0 a 4, e le cose dal punto di vista logico non sarebbero cambiate. Per rappresentare 298 si sarebbe dovuto fare così: 298:5=(59 con resto 3), 59:5=(11 con resto 4), 11:5=(2 con resto 1). Cioè occorre dividere per 5 finché non si ottengono dei numeri inferiori a 5. In questo caso 298 scritto a base 10, è rappresentato a base 5 col numero 2143, cioè: 3 = unità del primo ordine, 4 = unità del secondo ordine, 1 = unità del terzo ordine, 2 = unità del quarto ordine.

Ebrei e greci usavano anche le lettere dell'alfabeto come segni numerici.

Per poter risalire da una numerazione a base arbitraria a una decimale è semplice: $2143 = 2x5^3 + 1x5^2 + 4x5^1 + 3x5^0$ (nel sistema a base 5 ogni unità di un dato ordine è uguale a 5 unità dell'ordine subito inferiore) = 298.

Naturalmente si potevano scegliere sistemi di numerazione a base 3, 7, 9 ecc. Nel sistema quaternario, il pollice serviva per contare le altre dita. (Clicca qui per il sistema a base 3).

Tuttavia, il sistema che si è preferito adottare nel calcolo computeristico è stato quello binario, cioè a base 2, composto da 0 e 1. E' stata la facilità di rappresentarlo elettricamente che ha mosso la decisione. Esso infatti richiede due soli simboli, che possono facilmente essere tradotti con due stati elettrici (ad es. corrente positiva e negativa, acceso e spento).

Esadecimale	Binario
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

Usata dalla civiltà cinese molto tempo prima della nostra era, la numerazione binaria presenta inoltre il vantaggio di non richiedere la conoscenza di una tavola di addizione o di moltiplicazione.

E questo nonostante che la rappresentazione binaria di un numero richieda circa il triplo delle cifre richieste per la sua rappresentazione decimale.

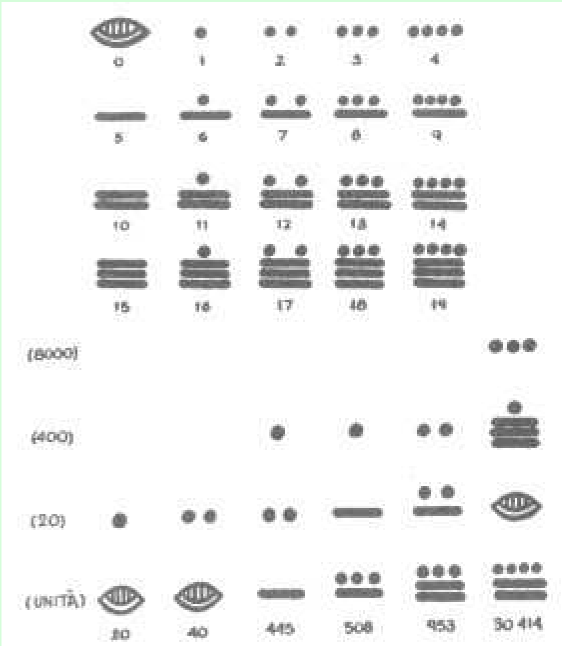
E' vero che le espressioni, essendoci un numero minimo di simboli, richiedono un tempo molto lungo di elaborazione, poiché si vengono a creare lunghe file di 0 e di 1, ma l'enorme velocità del computer ha saputo risolvere anche questo problema.

Un numero in codice binario è quindi ottenuto dalle cifre 0 e 1 che, da destra a sinistra, indicano le potenze di 2 necessarie a formare il corrispondente numero decimale; ad es. 11001 corrisponde a 25, essendo: $25=1\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+0\times2^1+1\times2^0$.

SISTEMA DI NUMERAZIONE MAYA

Di un certo interesse era anche il sistema vigesimale degli antichi Maya. Come base dei loro calcoli avevano preso il numero 20, cioè la somma delle dita dei mani e dei piedi. La conchiglia era il simbolo dello zero; il punto equivaleva a uno; la barra (--) a 5. Questo sistema di numerazione, che era posizione e non additivo (come quello romano), permetteva di calcolare somme molto grandi.

Il sistema a base 20 dei Maya



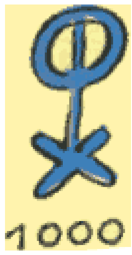
Come sistema, il loro era certamente migliore di quello egiziano e greco-romano. I primi spagnoli rimasero impressionati dalla rapidità con cui i Maya contavano, senza misure di capacità o peso, i semi di cacao, che vendevano uno ad uno in quantità varianti da 400 a 8.000.

LA MANO

Il primo *computer* usato dall'uomo è stato senza dubbio la **mano**. Grazie alle mani gli egiziani riuscirono a rappresentare tutti i numeri sino a 9999 ed erano in grado di eseguire addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e anche calcoli più complessi. Il termine inglese "digit" ("cifra"), oggi tanto usato, deriva proprio dalla parola latina *digitus* ("dito").

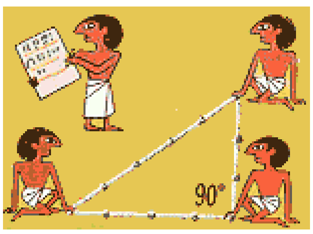
Ma, prima di arrivare a questa conquista, c'è voluto molto tempo. L'uomo che viveva diecimila anni fa, sapeva contare solo fino a due. Ancora oggi, presso i popoli primitivi, il sistema di numerazione parlata o *mimica* è il più diffuso. Spesso addirittura la parola che significa "due" deriva da quella che significa "braccia"; la parola "cinque" da quella che significa "mano"; la parola "venti" da quella che significa "uomo intero", e così via.

Quando l'uomo primitivo cominciò a indicare il totale degli animali abbattuti durante la caccia per mezzo di un insieme di "tacche", aveva praticamente imparato a fare piccole somme. Quantità di oggetti oltre la cinquantina generalmente venivano stimate a occhio, con buona approssimazione.



A volte si usavano *numeri fissi* (4, 6, 8) per designare più facilmente gruppi di oggetti di uso comune (uova, animali domestici, conchiglie...). Si potevano anche usare *parole fisse* per indicare un numero prestabilito di oggetti (frutti, collane, piante, animali...).

Quando l'uomo cominciò a praticare l'agricoltura, si trovò nella necessità di segnare i confini dei campi e di misurarli. Al principio la lunghezza di un lato del campo veniva misurata col piede. Per ovviare al problema della diversa lunghezza dei piedi, egli si mise alla ricerca di un'unità di misura fissa e la trovò in una serie di nodi su una fune, posti alla medesima distanza l'uno dall'altro.



- Circa 4.000 anni fa gli egizi utilizzavano ancora le funi coi nodi per misurare gli edifici. Essi, p.es., sapevano che se, con una di queste funi divisa in 12 segmenti uguali, si delineava un triangolo, i cui lati misurassero 3, 4 e 5 unità di misura (distanza tra un nodo e l'altro), i due lati minori definivano un angolo retto.

Matematica nell'antico Egitto

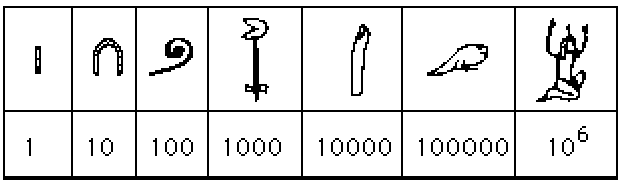
E' noto che le popolazioni che vivevano anticamente sulle sponde del Nilo usassero come scrittura i **geroglifici**; tale modalità di scrittura veniva impiegata principalmente per le incisioni su pietra e prevedeva un modo per rappresentare i numeri. Dall'altro lato c'era la scrittura degli scribi, utilizzata per i papiri, che veniva detta scrittura **ieratica** (che potrebbe essere vista, per fare un'analogia, come il nostro corsivo). Purtroppo, mentre per la matematica babilonese il supporto principale erano tavolette di terracotta, per quanto riguarda gli egizi la gran parte delle testimonianze ci è giunta su papiro che però mal sopporta il tempo e le intemperie.

Le due più importanti testimonianze per quanto riguarda la matematica egizia sono:
- il Papiro di Rhind: si tratta di un papiro largo circa 30 cm e lungo circa 5,46 m conservato al British Museum. Era stato acquistato nel 1858 in una città balneare sul Nilo da un antiquario scozzese, Henry Rhind, e perciò è conosciuto spesso con il nome di Papiro di Rhind o, meno frequentemente, di Papiro di Ahmes in onore dello scriba che lo aveva trascritto intorno al 1650 a.C.. Lo scriba ci informa che il contenuto è tratto da un esemplare risalente al Regno Medio e composto fra il 2000 e il 1800 a.C.. Contiene 87 problemi desunti dalla vita pratica di vario genere.

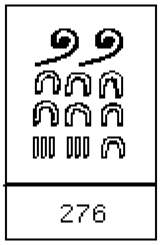
- il Papiro di Mosca: fu acquistato in Egitto nel 1893; è lungo circa come il Papiro di Rhind (circa 5,5 m), ma è largo soltanto un quarto di quest'ultimo (7,5 cm). Fu scritto da un ignoto scriba della dodicesima dinastia (1890 a.C. circa). Contiene 25 esempi, per lo più desunti dalla vita pratica e non molto diversi da quelli del Papiro di Ahmes.

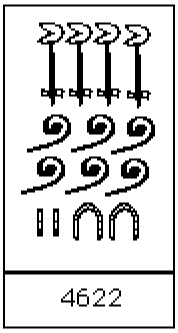
Il sistema di numerazione:

Per quanto riguarda il sistema di numerazione geroglifico, è presente una base 10 e per scrivere i numeri venivano affiancati i simboli di unità, decine, centinaia, ... C'è da notare che non si tratta di un sistema posizionale poiché ogni simbolo ha un significato/valore intrinseco e di conseguenza non ha importanza come vengono rappresentati i vari simboli per formare un numero.



Egyptian numeral hieroglyphs

Esempi: 



Per quanto riguarda le operazioni si aveva l'addizione e la moltiplicazione pressoché identiche alle nostre, con l'accorgimento che a 10 simboli uguali andava sostituito il simbolo di un ordine di grandezza successivo; la moltiplicazione e la divisione invece si basavano sulla scomposizione dei fattori in base due come si può vedere nel seguente semplice esempio:

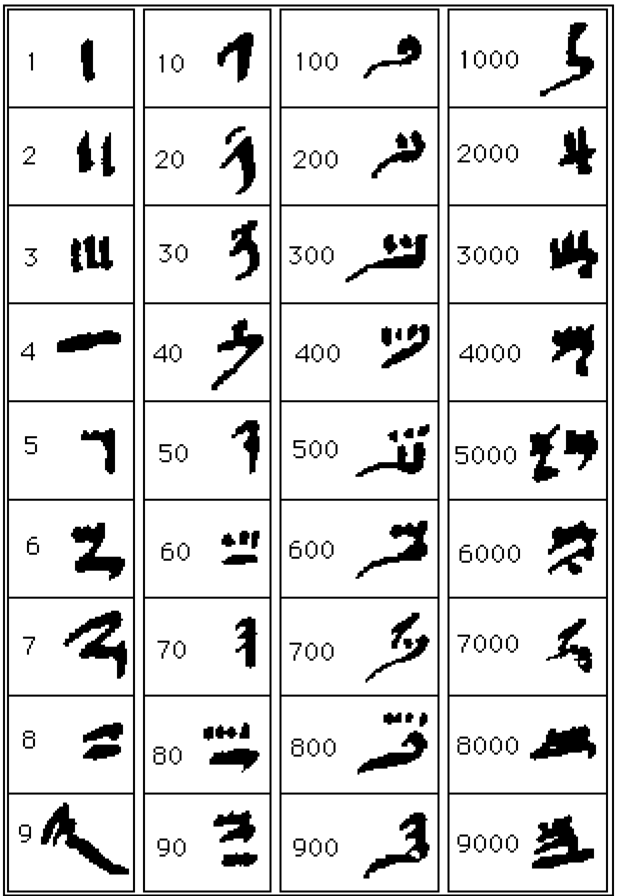
Poniamo di voler calcolare 41 * 59. Per prima cosa si scrivono i due fattori su due colonne; poi sulla colonna di sinistra, partendo dall'unità si scrivono le potenze di 2 minori del primo fattore. Sulla colonna di destra comparirà invece il secondo fattore raddoppiato. Nella colonna di sinistra vanno trovati ora quei numeri che sommati danno il primo fattore (41). Segnamo i corrispondenti nella colonna di destra: la loro somma è proprio il risultato della moltiplicazione.

41	59
1	59
2	118
4	236
8	472
16	944
32	1888

41*59=59+472+1888=2419

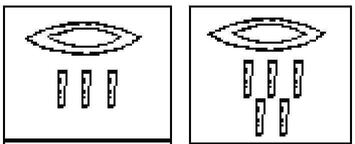
In modo simile si poteva procedere per la divisione.

Per quanto riguarda il sistema di rappresentazione **ieratico**, si tratta di un sistema composto da simboli più semplici da rappresentare; è anch'esso **non posizionale**. Vi erano 9 simboli tutti diversi per le unità e vi erano poi dei simboli per rappresentare i multipli di 10, di 100 e di 1000; si otteneva quindi una numerazione non posizionale relativamente veloce sino a 9999.



Hieratic numerals

Oltre a queste conoscenze, dai papiri di Rhind e di Mosca, si deduce la conoscenza e l'uso presso gli antichi egizi di **frazioni**. In genere erano utilizzate tutte frazioni con numeratore l'unità fatta eccezione per 2/3 e 3/4; venivano rappresentate segnando un piccolo ovale il simbolo indicante il numero di cui si voleva il reciproco, come si piò vedere nei seguenti esempi:

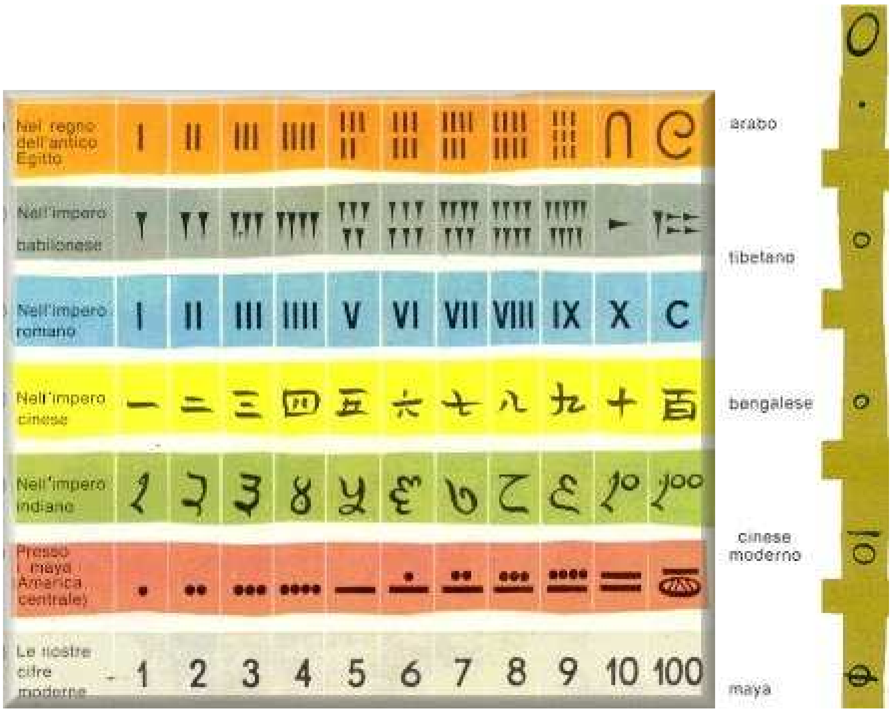


1/3 1/5

Da ultimo notiamo che molti studiosi attribuiscono la nascita della **geometria** proprio agli antichi egizi, in quanto erano a conoscenza di tecniche abbastanza sofisticate per la misura di segmenti, aree e volumi anche complesse (come ad esempio quella del cerchio [con un'approssimazione di **pigreco** pari al quadrato di (2-2/9)]). Ciò che è certo è che le periodiche esondazioni del Nilo cancellavano i confini dei territori e provocavano disagi che venivano ben superati anche grazie alla conoscenza di questi *'strumenti teorici'*.

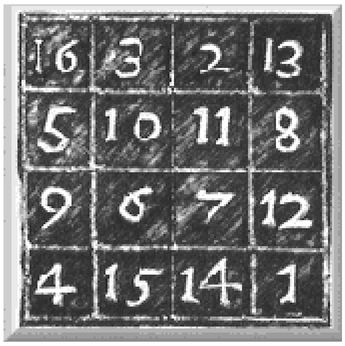
LE FORME DEI NUMERI

Nel corso dei secoli i numeri hanno avuto aspetti molto diversi in tempi e presso popoli differenti.



La forma in uso ancora oggi è stata creata intorno al 1525 dal pittore Albrecht Dürer, che si divertiva coi numeri.

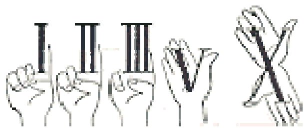
Gli è attribuito anche questo quadrato magico del 1514. Sommando tra loro i numeri di ogni colonna, di ogni riga e di ogni diagonale si ottiene sempre il medesimo risultato.



L'uomo percepisce a colpo d'occhio, cioè senza eseguire alcun calcolo, un massimo di cinque oggetti. Infatti, se è vero che il senso del numero è innato, è anche vero che il cervello è in grado di percepire solo gruppi di pochi elementi.

Entrambi gli emisferi cerebrali partecipano a questa attività: quello di sinistra è specialista nel calcolo esatto, riconosce i simboli matematici ed elabora complesse operazioni, come divisioni e radici quadrate. Il destro invece percepisce le piccole quantità di oggetti e sa compiere semplici addizioni e sottrazioni.

NUMERAZIONE ROMANA



I romani rappresentavano i numeri con alcune lettere maiuscole del loro alfabeto. Il disegno di queste lettere:
I (uno), V (cinque), X (dieci), C (cento), D (cinquecento), M (mille), era molto semplice e si poteva fare ovunque: per terra, sulla sabbia, sulla polvere, con un bastoncino. In fondo la terra non è forse stato il primo quaderno da scrivere? Le prime lettere dell'alfabeto furono disegnate su tavolette ricoperte di sabbia; solo successivamente la sabbia venne sostituita dalla cera e le lettere venivano incise con un ferro appuntito chiamato "stilo".

La numerazione romana era fondata su questi principi:

1. le lettere I - X - C si potevano ripetere fino a tre volte (II=2; III=3; XX=20; XXX=30);
2. una cifra piccola, posta alla destra di una più grande, si sommava (VI=6; VIII=8; XII=12; LV=55);
3. le cifre I - X - C, poste alla sinistra di una cifra più grande, si sottraevano (IV=4; IX=9; XC=90; CD=400);
4. un trattino orizzontale, segnato sopra una o più lettere, rendeva il loro valore mille volte più grande ($\overline{\text{III}}$ = 3.000; $\overline{\text{X}}$ = 10.000; $\overline{\text{X}}\text{VIII}$= 10.008);
5. due trattini orizzontali rendevano il valore delle lettere un milione di volte più grande ($\overline{\overline{\text{V}}}$ = 5 milioni).

Per poter fare i calcoli non usavano ovviamente la numerazione scritta, ma alcuni sassolini, che in latino si chiamavano appunto "calcoli". I sassolini, a loro volta, venivano infilati nelle scanalature di un abaco. Ovviamente i romani non avevano parole per i numeri più grandi di 100.000 (per i greci, d'altra parte, 10.000 era già una "miriade").

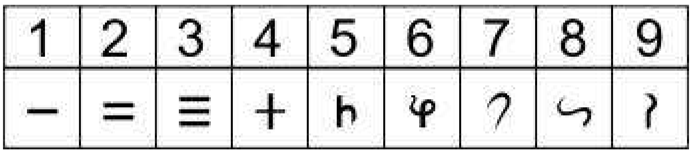
I NUMERI ARABI

I **numeri arabi**, prima conosciuti come **numeri indo-arabici**, o anche come **numeri indiani**, **numeri indù**, **numeri arabi occidentali**, **numeri europei**, o **numeri occidentali**, sono la rappresentazione simbolica più comune al mondo. Sono considerati una pietra miliare nello sviluppo della matematica.

Si può distinguere tra il sistema posizionale utilizzato, anche conosciuto come sistema numerico indo-arabo, ed il preciso glifo utilizzato. I glifi più comunemente usati in associazione all'alfabeto latino sin dai tempi dell'Era moderna sono 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9.

I numeri nacquero in India tra il 400 a.C. ed il 400 d.C. Furono trasmessi prima nell'Asia occidentale, dove trovano menzione nel IX secolo, ed in seguito in Europa nel X secolo. Poiché la conoscenza di tali numeri raggiunse l'Europa attraverso il lavoro di matematici ed astronomi arabi, i numeri vennero chiamati "numeri arabi".

L'iscrizione universalmente accettata come la prima contenente il glifo 0 è stata registrata per la prima volta nel IX secolo, a Gwalior risalente all'870. In ogni caso, prima di questa data, l'uso del glifo aveva già raggiunto la Persia, ed è menzionato nelle descrizioni di al-Khwarizmi sui numeri indiani. Documenti indiani su piatti di rame, con lo stesso simbolo per zero in essi, risalgono indietro fino al VI secolo d.C., in grande quantità.



Numeri brahmitici indiani del I secolo d.C.

Tastiera telefonica araba moderna con numeri indo arabici e i corrispondenti numeri in lingua araba

Nel mondo arabo - fino ai tempi moderni - il sistema numerico arabo era utilizzato solo dai matematici. Scienziati musulmani utilizzavano il sistema di numerazione babilonese, e i mercanti utilizzavano i numeri Abjad. Fu solo con il matematico italiano Fibonacci che il sistema numerico arabo fu utilizzato da larghi strati della popolazione.

Leonardo Fibonacci detto Leonardo da Pisa (Pisa, 1170ca. – Pisa, 1240ca.) fu un matematico italiano che aveva studiato a Bugia, in Algeria.

Promosse il sistema numerico arabo in Europa con il suo testo *Liber Abaci*, che fu scritto nel 1202, e che ancora descriveva i numeri come "indiani" anziché "arabi":

Con altri matematici del tempo, contribuì alla rinascita delle scienze esatte dopo la decadenza dell'ultima parte dell'età classica e del primo Medioevo.

Assieme al padre *Guglielmo dei Bonacci* (Fibonacci sta infatti per filius Bonacci), facoltoso mercante pisano e rappresentante dei mercanti della Repubblica di Pisa (publicus scriba pro pisanis mercatoribus) nella regione di Bugia in Cabilia (Algeria), passò alcuni anni in quella città, dove studiò i *procedimenti aritmetici* che studiosi musulmani stavano diffondendo nelle varie regioni del mondo islamico. Qui ebbe anche precoci contatti con il mondo dei mercanti e apprese tecniche matematiche sconosciute in Occidente. Alcuni di tali procedimenti erano stati introdotti per la prima volta dagli Indiani, portatori di una cultura molto diversa da quella mediterranea. Proprio per perfezionare queste conoscenze, Fibonacci viaggiò molto, arrivando fino a Costantinopoli, alternando il commercio con gli studi matematici.

Molto dovette alle opere di *Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, Abu Kamil* e ai maestri arabi, senza però essere mero diffusore della loro opera. Ritornato in Italia, la sua notorietà giunse anche alla corte dell'imperatore Federico II, soprattutto dopo che risolse alcuni problemi del matematico di corte. Per questo motivo gli fu assegnato un vitalizio che gli permise di dedicarsi completamente ai suoi studi.

L'accettazione europea dei numeri fu accelerata dall'invenzione della stampa a caratteri mobili e divennero comuni durante il XV secolo. I numeri romani rimasero in uso principalmente per la notazione degli anni dopo Cristo, e per i numeri dei quadranti di orologio. Alle volte, i numeri romani sono utilizzati per la numerazione di liste (come alternativa ad una numerazione alfabetica), in Italia per indicare la posizione ordinale (specialmente i secoli e i pontefici) e nella numerazione delle pagine delle prefazione dei libri. Il numero XV è altresì usato per indicare le nazionali di rugby (15 come i giocatori schierati in campo).