I numeri irrazionali

La scuola Pitagorica, fondata da Pitagora a Crotone intorno al 530 a. C., ha contribuito considerevolmente allo sviluppo della matematica.

Si devono ai pitagorici, oltre al famoso teorema di Pitagora, le seguenti scoperte:

- la teoria delle proporzioni
- la formula per il calcolo della somma degli angoli interni di un poligono
- la soluzione geometrica di alcune equazioni algebriche
- la costruzione dei solidi regolari
- la dipendenza degli intervalli musicali da precise relazioni di lunghezza delle corde
- …

I pitagorici erano sostenitori delle teorie orfiche *(movimento religioso misterico dell'antica Grecia)* dell'immortalità dell'anima e della reincarnazione. Essi ritenevano che per mantenerla pura e incontaminata occorresse svolgere delle pratiche ascetiche, sia spirituali che fisiche.

Tra queste, solitarie passeggiate mattutine e serali, cura del corpo ed esercizi quali corsa, lotta, ginnastica e diete costituite da cibi semplici e che abolivano anche l'assunzione di vino. Questi dotti si arroccavano su posizioni rigide come quello di non toccare i galli bianchi, di non mangiare i fagioli e le fave o di non passeggiare per le vie maestre.

Tra le pratiche per la purificazione del corpo e dell'anima i pitagorici privilegiavano la musica che li portò a scoprire il rapporto numerico alla base dell'altezza dei suoni che, secondo la leggenda, Pitagora trovò riempiendo con dell'acqua un'anfora che percossa emanava una nota, poi togliendo una parte ben definita dell'acqua, otteneva un'altra nota maggiore di un'ottava.

I carattere religioso dogmatico dell'insegnamento è confermato dal fatto che la parola del maestro non poteva essere messa in discussione: a chi obiettava si rispondeva: "*autòs epha*" (in latino "*ipse dixit*"), «l'ha detto proprio lui» e quindi era una verità indiscutibile.

Fu proprio la loro superstizione e il loro dogmatismo a segnare la tragedia della matematica greca.

In particolare, il divieto tassativo di divulgare la notizia della scoperta dell'incommensurabilità della diagonale del quadrato da parte di un discepolo della scuola, un certo Ippaso da Metaponto, segnò il declino della scuola Pitagorica.

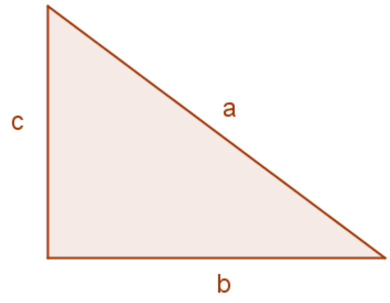
Per i pitagorici numero significava solo numero intero perciò essi erano infastiditi dalla scoperta che alcuni rapporti, come quello tra la diagonale e il lato del quadrato non fossero esprimibili mediante numeri interi.

I pitagorici non li potevano accettare perché fino a quel momento avevano identificato il numero con la geometria; l'esistenza dei rapporti incommensurabili annullò questa identificazione.

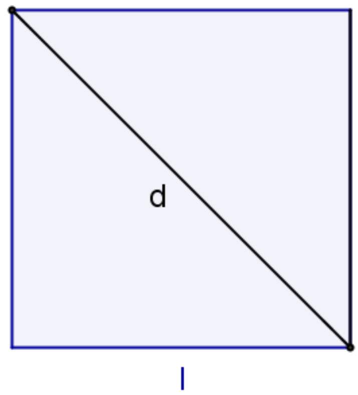
Nessuno doveva dubitare che i numeri interi e i loro rapporti, cioè i numeri razionali fossero l'essenza genuina del Creato, basato su valenze etiche. Invece, uno di loro, un tale Ippaso di Metaponto, dubitò.

Ciò accadde quando i dotti della Scuola si impantanarono in una problematica solo all'apparenza banale: calcolare la diagonale del quadrato.

La risoluzione passò attraverso il famoso teorema di Pitagora sui triangoli rettangoli.



Come sappiamo, se a è l'ipotenusa e b e c sono i due cateti di un triangolo rettangolo, vale: $a^2 = b^2 + c^2$ (il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui due cateti).



Nel caso della diagonale del quadrato i due cateti sono uguali.

Applicando il teorema di Pitagora, si ha:

$$d^2 = l^2 + l^2 \ ; \quad d^2 = 2\,l^2 \ ; \quad \frac{d^2}{l^2} = 2 \ ; \quad \left(\frac{d}{l}\right)^2 = 2 \ ;$$

Si tratta allora di determinare quel valore che elevato al quadrato dia 2.

Tale valore, come ben sappiamo, è $a = \sqrt{2}$.

I Pitagorici disponevano di sistemi ingegnosi per risolvere l'equazione pitagorica, ma nessuno funzionava per questo caso particolare.

Ippaso da Metaponto comprese per primo che il valore esatto di questo numero non poteva essere ricavato da una semplice formula e neppure da una serie limitata di calcoli. Aveva in pratica scoperto che esistevano grandezze incommensurabili.

Oggi sappiamo che i numeri irrazionali, come appunto $\sqrt{2}$, sono numeri che hanno una serie infinita e non ripetitiva di cifre decimali. Questo vuol dire che non è possibile dare un valore preciso di $\sqrt{2}$; si tratta di una grandezza incommensurabile, cioè non misurabile esaustivamente con metodi numerici. In termini pratici ciò non comporta grandi problemi, ma ha un significato teorico di enorme portata.

Ippaso rimase colpito da questa scoperta, perché introduceva la matematica nei meandri affascinanti dell'infinito. Decise allora di divulgare la scoperta dell'incommensurabilità della diagonale del quadrato, contravvenendo ai tabù della Scuola che non poteva accettare l'idea di valori non del tutto calcolabili, conseguenza di un cosmo incompiuto e impuro. La parola cosmo fu coniata proprio da loro e stava a rappresentare un universo rigidamente ordinato. L'irregolarità imprevedibile dei decimali nello sviluppo di un numero irrazionale non poteva adeguarsi a questo punto di vista.

I Pitagorici mancarono così una grande occasione, radiando Ippaso dalla scuola Pitagorica.

Ippaso morì qualche anno dopo in un naufragio. All'evento i suoi ex-compagni guardarono come a una punizione divina. Ma non è da scartare l'ipotesi che egli fosse stato annegato per mano della Scuola.

La sovranità dei numeri razionali durò per 2300 anni, sino a quando i tedeschi Cantor e Dedekind, insieme ad altri matematici, tornarono ad affrontare e a risolvere la questione degli irrazionali e dell'infinito.

Pitagora nacque a Samo, una delle isole del Dodecanneso, nel 575 a.C. Egli trasformò la matematica da uno strumento per fare i calcoli nella scienza che conosciamo oggi. Visitò l'Egitto e la Mesopotamia. Nei suoi viaggi raccolse informazioni matematiche ed astronomiche. Nel 518 a.C si stabilì a Crotone, sulle coste sud-orientali della Magna Grecia (l'attuale Italia) dove fondò la Scuola Pitagorica.

Dimostrazione
La dimostrazione è effettuata utilizzando la dimostrazione per assurdo (Si parte dalla negazione della tesi e si mostra che si arriva ad un assurdo, cioè alla negazione di quello che si assunto per vero)

Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale, cioè che si può scrivere come il rapporto fra due numeri interi:

$\sqrt{2} = \dfrac{m}{n} \quad con\ n\ ed\ m\ numeri\ primi\ fra\ loro$

$Elevando\ al\ quadrato\ ambo\ i\ membri\ si\ ha\text{:}\ \ 2 = \dfrac{m^2}{n^2}$

$che\ si\ può\ scrivere\ come\text{:} \quad m^2 = 2n^2 \quad (*) \quad \Leftrightarrow \quad m^2\ \ è\ pari$

$Ma\ se\ \ m^2\ \ è\ \ pari \quad \Rightarrow \quad m\ \ è\ \ pari$

$Ma\ se\ \ m\ \ è\ \ pari\ \ si\ può\ scrivere\text{:} \quad m = 2k$

$Sostituendo\ tale\ espressione\ nell'uguaglianza\ (*)\ si\ ha\text{:} \quad (2k)^2 = 2n^2 \quad cioè\text{:}\ \ 4k^2 = 2n^2$

$Dividendo\ per\ 2\ si\ ha\text{:} \quad n^2 = 2k^2\ \ ; \quad (*) \quad \Leftrightarrow \quad n^2\ \ è\ pari$

$Ma\ se\ \ n^2\ \ è\ \ pari \quad \Rightarrow \quad n\ \ è\ \ pari$

Avendo dimostrato che sia m sia n sono pari si ottiene un assurdo, poiché abbiamo supposto che m ed n erano numeri primi fra loro. L'asserzione è pertanto dimostrata.

I numeri irrazionali sono tutti i numeri decimali illimitati non periodici.

I numeri irrazionali sono infiniti e sono più numerosi dei numeri razionali.

Esempi di numeri irrazionali:

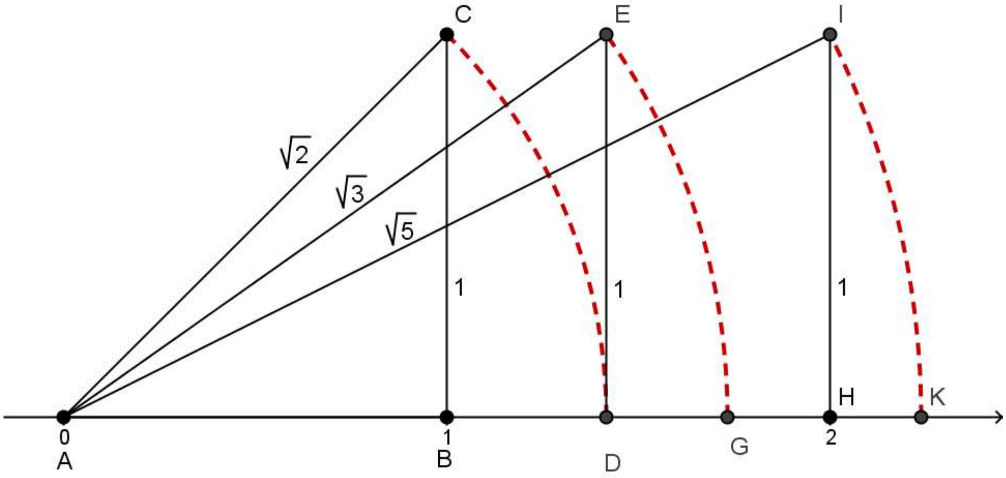
- tutte le radici quadrate di numeri naturali che non sono quadrati perfetti:
  $\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{3}\ ,\ \sqrt{5}\ ,\ \sqrt{6}\ ,\ \sqrt{7}\ ,\ \sqrt{8}\ ,\ \sqrt{10}$, …
- tutte le radici cubiche di numeri naturali che non sono cubi perfetti:
  $\sqrt[3]{2}\ ,\ \sqrt[3]{3}\ ,\ \sqrt[3]{4}\ ,\ \sqrt[3]{5}\ ,\ \sqrt[3]{6}\ ,\ \sqrt[3]{7}\ ,\ \sqrt[3]{9}\ ,\ \sqrt[3]{10}$, …
- tutte le radici quarte di numeri naturali che non sono quarte potenze esatte:
  $\sqrt[4]{2}\ ,\ \sqrt[4]{3}\ ,\ \sqrt[4]{4}\ ,\ \sqrt[4]{5}\ ,\ \sqrt[4]{6}\ ,\ \sqrt[4]{7}\ ,\ \sqrt[4]{8}\ ,\ \sqrt[4]{9}$, …
- tutte le radici quinte di numeri . . .
- . . .
- $\pi = 3{,}14159265358979323 84$ …
- e = 2,7 1828 1828 45904 52353 60287 47135 26624 77572 47093 699 … *(numero di Nepero)*
- 7,01001100011100001111 …
- 7,026002600026000026 …

Nota

Le prime cifre decimali di $\sqrt{\mathbf{2}}$ sono: 1,4142135623730950488016887242097…

Le prime cifre decimali di $\sqrt{\mathbf{3}}$ sono: 1,7320508075688772935274463415058723669 42 …

Rappresentazione dei numeri irrazionali



Classi contigue di numeri razionali

Un valore approssimato di $\sqrt{2}$ è $\sqrt{2} \cong 1{,}4142135623730950488016887242097 \ldots$

Costruiamo adesso i due insiemi:

$D = \{1\,;\ \ 1{,}4\,;\ \ 1{,}41\,;\ \ 1{,}414\,;\ \ 1{,}4142\,;\ \ 1{,}41421\,;\ \ 1{,}414213\,;\ldots\}$

$E = \{2\,;\ \ 1{,}5\,;\ \ 1{,}42\,;\ \ 1{,}415\,;\ \ 1{,}4143\,;\ \ 1{,}41422\,;\ \ 1{,}414214\,;\ldots\}$

Gli elementi dell'insieme *D* sono tutti i valori approssimati per *difetto* (a meno di 0,1, di 0,01, . . .) di $\sqrt{2}$.

Gli elementi dell'insieme *E* sono tutti i valori approssimati per *eccesso* (a meno di 0,1, di 0,01, . . .) di $\sqrt{2}$.

I due insiemi D ed E rappresentano due *classi contigue* di numeri razionali, perché godono delle seguenti due proprietà:

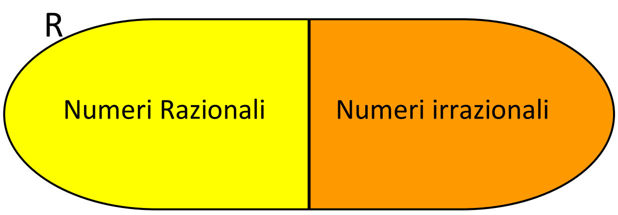
1. Ogni elemento di D è minore di ciascun elemento di E
   $(In\ simboli: \quad \forall x \in D \ \ e \ \ \forall y \in E \ \ si\ ha\ che: x < y \ )$
2. Fissato un numero positivo ε piccolo a piacere, è sempre possibile trovare un elemento di E e un elemento di D, la cui differenza sia minore di ε
   $(In\ simboli: \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists y \in E \quad e \quad \exists x \in D \quad tali\ che: \ \ x - y < \varepsilon \ )$

   $Infatti: \ \ Se\ \varepsilon = 0{,}01 \ \ si\ può\ prendere \ \ y = 1{,}415 \ \ e \ \ x = 1{,}414 \quad \Rightarrow \quad y - x = 0{,}001 < 0{,}01 = \varepsilon$

Il numero $\sqrt{2}$, essendo maggiore di ogni elemento dell'insieme D e minore di ogni elemento dell'insieme E, è detto *elemento separatore* delle due classi.

Si dice *numero reale* l'elemento separatore di due classi contigue di numeri razionali.

L'unione dell'insieme dei numeri razionali e dell'insieme dei numeri irrazionali è detto insieme dei *numeri reali*, e si indica con la lettera *R*.



L'insieme R è *denso*, cioè fra due numeri reali a e b esiste sempre un altro numero reale, e quindi infiniti altri punti.

L'insieme dei numeri reali è *completo*, cioè a ogni numero reale corrisponde un punto della retta e viceversa, a ogni un punto della retta corrisponde un numero reale.

Gli insiemi N, Z e Q non sono completi.

Infatti, tutti i numeri irrazionali occupano *"posti"* sulla retta che i numeri razionali hanno lasciato «vuoti».