EQUAZIONI IRRAZIONALI

con radicali con indice dispari

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x) \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = [B(x)]^n$$

$$\sqrt[n]{A(x)} = \sqrt[n]{B(x)} \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = B(x)$$

EQUAZIONI IRRAZIONALI

con radicali con indice pari

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^n \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{A(x)} = \sqrt[n]{B(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) = B(x) \end{cases} \quad oppure \quad \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = B(x) \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{A(x)} = k \quad (k \geq 0) \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = k^n$$

$$\sqrt[n]{A(x)} = k \quad (k < 0) \quad \Leftrightarrow \quad \nexists\, x \in R$$

Quando invece figurano due o più radicali occorre:

1. determinare le condizioni di esistenza dei radicali di indice pari (radicandi ≥ 0);
2. *spostare, se è possibile, i termini da un membro all'altro, in modo da ottenere un'equazione in cui i due membri sono non negativi;*
3. *imporre le condizioni di concordanza di segno*

$\sqrt[n]{A(x)} = B(x) \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = [B(x)]^n$

$\sqrt[n]{A(x)} = \sqrt[n]{B(x)} \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = B(x)$

Esempio 1

$\boldsymbol{\sqrt[3]{x^3 - 8} = x - 2}$;

$x^3 - 8 = (x-2)^3$; $\quad x^3 - 8 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$; $\quad 6x^2 - 12x = 0$;

$6x \cdot (x-2) = 0$; $\quad \boldsymbol{x_1 = 0}$, $\boldsymbol{x_2 = 2}$ $\quad$ *L'insieme delle soluzioni è* $\boldsymbol{S = \{\, 0 \,, 2 \,\}}$.

Esempio 2

$\boldsymbol{\sqrt[3]{x^3 - x} = x - 1}$; $\quad x^3 - x = (x-1)^3$; $\quad x^3 - x = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$;

$3x^2 - 4x + 1 = 0$; $\quad \frac{\Delta}{4} = 4 - 3 = 1$; $\quad x_{1,2} = \frac{2 \mp 1}{3} = \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = 1 \end{array}$

Esempio 3

$\boldsymbol{\sqrt[5]{3x - 8} = \sqrt[5]{2x - 3}}$; $\quad 3x - 8 = 2x - 3$; $\quad x = 5$.

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^n \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{A(x)} = \sqrt[n]{B(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) = B(x) \end{cases} \quad oppure \quad \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = B(x) \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{A(x)} = k \quad (k \geq 0) \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = k^n$$

$$\sqrt[n]{A(x)} = k \quad (k < 0) \quad \Leftrightarrow \quad \nexists\, x \in R$$

Quando invece figurano due o più radicali occorre:

4. determinare le condizioni di esistenza dei radicali di indice pari (radicandi ≥ 0);
5. *spostare, se è possibile, i termini da un membro all'altro, in modo da ottenere un'equazione in cui i due membri sono non negativi;*
6. *imporre le condizioni di concordanza di segno*

Esempio 1

$\boldsymbol{\sqrt[2]{2-x} = 3}$; $\qquad 2 - x = 3^2$; $\qquad x = -7$.

L'insieme delle soluzioni è $\boldsymbol{S = \{ -7 \}}$

Esempio 2

$\boldsymbol{\sqrt[2]{2-x} = -3}$; $\qquad \boldsymbol{\nexists\, x \in R}$. $\qquad$ *L'insieme delle soluzioni è* $\boldsymbol{S = \emptyset}$.

Esempio 3

$\boldsymbol{\sqrt[2]{x+1} = 5 - x}$; $\qquad \begin{cases} 5 - x \geq 0 \\ x + 1 = (5-x)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x \geq -5 \\ x + 1 = 25 + x^2 - 10x \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq 5 \\ x^2 - 11x + 24 = 0 \end{cases}$

Risolviamo: $x^2 - 11x + 24 = 0$; $\quad \Delta = 121 - 96 = 25$; $\quad x_{1,2} = \frac{11 \mp 5}{2} = \begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 8 \end{matrix}$

$\begin{cases} x \leq 5 \\ x_1 = 3 \quad \wedge \quad x_2 = 8 \end{cases}$ $\qquad$ *L'insieme delle soluzioni è* $\boldsymbol{S = \{ 3 \}}$

Esempio 4

$\boldsymbol{\sqrt[4]{3x-8} = \sqrt[4]{x^2-6x}}$ $\qquad \begin{cases} 3x - 8 \geq 0 \\ 3x - 8 = x^2 - 6x \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq \frac{8}{3} \\ x^2 - 9x + 8 = 0 \end{cases}$

Risolviamo: $x^2 - 9x + 8 = 0$; $\quad \Delta = 81 - 32 = 49$; $\quad x_{1,2} = \frac{9 \mp 7}{2} = \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 8 \end{matrix}$

$\begin{cases} x \geq \frac{8}{3} \\ x_1 = 1 \quad \wedge \quad x_2 = 8 \end{cases}$ $\qquad$ *L'insieme delle soluzioni è* $\boldsymbol{S = \{ 8 \}}$

Esempio 5

$\sqrt[4]{\mathbf{5x+1}} = \sqrt[4]{\mathbf{x^2+3x-2}}$

$$\begin{cases} 5x+1 \geq 0 \\ 5x+1 = x^2+3x-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{5} \\ x^2-2x-3=0 \end{cases}$$

Risolviamo: $x^2-2x-3=0$; $\frac{\Delta}{4} = (-1)^2 - 1\cdot(-3) = 1+3 = 4$; $x_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{4}}{1} = \begin{matrix} x_1 = 1-2 = -1 \\ x_2 = 1+2 = +3 \end{matrix}$

$$\begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{5} \\ x_1 = -1 \quad \wedge \quad x_2 = 3 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è $\boldsymbol{S = \{\,3\,\}}$.

Esempio 6

$\sqrt[2]{\mathbf{x+4}} = \mathbf{x-2}$;

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+4 = (x-2)^2 \end{cases}$$

Risolviamo: $x+4=(x-2)^2$; $x+4 = x^2-4x+4$; $x^2-5x=0$; $x\cdot(x-5)=0$; $\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 5 \end{matrix}$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = 5 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è $\boldsymbol{S = \{\,5\,\}}$.

Esempio 7

$\sqrt[2]{\mathbf{2x}} - \sqrt[2]{\mathbf{x+7}} = \mathbf{-1}$; *Le condizioni di esistenza sono:* $\begin{cases} 2x \geq 0 \\ x+7 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq -7 \end{cases}$ $x \geq 0$ (1)

Per evitare che negli elevamenti al quadrato si introducano soluzioni estranee, riscriviamo l'equazione in modo da assicurare la positività di entrambi i membri.

$\sqrt[2]{2x} + 1 = \sqrt[2]{x+7}$; *elevando al quadrato entrambi i membri* $\left(\sqrt{2x}+1\right)^2 = \left(\sqrt[2]{x+7}\right)^2$ *si ottiene:*

$2x + 1 + 2\sqrt{2x} = x+7$; $2\sqrt{2x} = 6-x$; *questa equazione è del primo tipo (primo esempio).*

$$\begin{cases} 6-x \geq 0 \\ \left(2\sqrt{2x}\right)^2 = (6-x)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq 6 \\ 8x = 36 + x^2 - 12x \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq 6 \quad (2) \\ x^2 - 20x + 36 = 0 \end{cases}$$

Risolviamo: $x^2-20x+36=0$; $\frac{\Delta}{4} = 100-36 = 64$; $x_{1,2} = 10 \mp 8 = \begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = 18 \end{matrix}$

Affinché una soluzione sia accettabile, deve soddisfare sia le condizioni di esistenza (1), *sia la condizione di concordanza di segno* (2) .

Ossia: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 6$ *Pertanto l'insieme delle soluzioni è* $\boldsymbol{S = \{\,2\,\}}$.

Esempio 8

$\boldsymbol{\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+5}=-3}$

Riscriviamo l'equazione in modo da assicurare la concordanza di segno:

$\sqrt{x+2}+3=2\sqrt{x+5}$

Le condizioni di esistenza dell'equazione sono: $\begin{cases} x+2\geq 0 \\ x+5\geq 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x\geq -2 \\ x\geq -5 \end{cases}$ $\quad x\geq -2 \quad (1)$

Sotto queste condizioni, elevando ambo i membri al quadrato, si ottiene:

$\left(\sqrt{x+2}+3\right)^2=\left(2\sqrt{x+5}\right)^2$; $\qquad x+2+9+6\sqrt{x+2}=4(x+5)$;

$6\sqrt{x+2}=4x+20-x-2-9$; $\qquad 6\sqrt{x+2}=3x+9$;

$2\sqrt{x+2}=x+3$;

Risolviamo tale equazione imponendo la condizione di concordanza di segno: $x+3\geq 0$

$\begin{cases} x+3\geq 0 \\ \left(2\sqrt{x+2}\right)^2=(x+3)^2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x\geq -3 \\ 4(x+2)=x^2+9+6x \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x\geq -3 \\ 4x+8=x^2+9+6x \end{cases}$

$\begin{cases} x\geq -3 \\ x^2+2x+1=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x\geq -3 \\ (x+1)^2=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x\geq -3 \quad (1) \\ x=-1 \end{cases}$

Affinché una soluzione sia accettabile, deve soddisfare sia le condizioni di esistenza (1) *, sia la condizione di concordanza di segno* (2) .

Ossia: $\begin{cases} x\geq -2 \\ x\geq -3 \end{cases}$ ossia $x\geq -2$ *Pertanto la soluzione* $\boldsymbol{x=-1}$ *è accettabile.*

Quindi l'insieme delle soluzioni è $\boldsymbol{S=\{\,-1\,\}}$ **.**

Esempio 9

$\boldsymbol{\sqrt[2]{x} - \sqrt[2]{x+5} = -\sqrt[2]{x-3}}$; *Le condizioni di esistenza sono:* $\begin{cases} x \geq 0 \\ x+5 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq -5 \\ x \geq 3 \end{cases}$ $x \geq 3$ (1)

Per evitare che negli elevamenti al quadrato si introducano soluzioni estranee, riscriviamo l'equazione in modo da assicurare la positività di entrambi i membri.

$\sqrt[2]{x} + \sqrt[2]{x-3} = \sqrt[2]{x+5}$; *elevando ambo i membri al quadrato si ha:*

$\left(\sqrt[2]{x} + \sqrt[2]{x-3}\right)^2 = \left(\sqrt[2]{x+5}\right)^2$; $x + x - 3 + 2\sqrt[2]{x \cdot (x-3)} = x + 5$;

$2\sqrt{x^2 - 3x} = 8 - x$; *risolviamo questa equazione come nell'esempio 1.*

$\begin{cases} 8 - x \geq 0 \\ \left(2\sqrt{x^2-3x}\right)^2 = (8-x)^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 8 \\ 4(x^2 - 3x) = 64 + x^2 - 16x \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq 8 \\ 4x^2 - 12x = 64 + x^2 - 16x \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 8 \quad (2) \\ 3x^2 + 4x - 64 = 0 \end{cases}$

$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 2^2 - 3 \cdot (-64) = 4 + 192 = 196$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{196}}{3} = \frac{-2 \pm 14}{3} = \begin{matrix} x_1 = \frac{-2-14}{3} = -\frac{16}{3} \\ x_2 = \frac{-2+14}{3} = \frac{12}{3} = 4 \end{matrix}$

$\begin{cases} x \leq 8 \\ x_1 = -\frac{16}{3} \quad \vee \quad x_2 = 4 \end{cases}$

Affinché una soluzione sia accettabile, deve soddisfare sia le condizioni di esistenza (1) *, sia la condizione di concordanza di segno* (2) .

Ossia: $\begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 8 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 3 \leq x \leq 8$ *Pertanto soltanto la soluzione* $x_1 = 4$ *è accettabile.*

In conclusione, l'insieme delle soluzioni dell'equazione data è $\boldsymbol{S = \{4\}}$ **.**

Esempio 10

$$\color{red}{\sqrt{6+x} = 3 - \sqrt{3x+7}}$$

Determiniamo le condizioni di esistenza: $\begin{cases} 6+x \geq 0 \\ 3x+7 \geq 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \geq -6 \\ x \geq -\dfrac{7}{3} \end{cases}$ $\quad x \geq -\dfrac{7}{3}$ $\quad (1)$

Riscriviamo l'equazione in modo da assicurare la concordanza di segno:

$\sqrt{6+x} + \sqrt{3x+7} = 3\,;$

Eleviamo ambo i membri al quadrato, si ottiene:

$\left(\sqrt{6+x} + \sqrt{3x+7}\right)^2 = 3^2\,;$

$6 + x + 3x + 7 + 2\sqrt{(6+x)(3x+7)} = 9\ ;$

$4x + 13 + 2\sqrt{18x + 42 + 3x^2 + 7x} = 9\ ;$

$2\sqrt{3x^2 + 25x + 42} = -4x - 4\ ;$

$\sqrt{3x^2 + 25x + 42} = -2x - 2\ ;$

Risolviamo tale equazione imponendo la condizione di concordanza di segno: $-2x - 2 \geq 0$

$$\begin{cases} 2x + 2 \leq 0 \\ \left(\sqrt{3x^2 + 25x + 42}\right)^2 = (-2x-2)^2 \end{cases}$$

Risolviamo:

$\left(\sqrt{3x^2 + 25x + 42}\right)^2 = (-2x-2)^2\,;$

$3x^2 + 25x + 42 = 4x^2 + 8x + 4\,;$

$3x^2 + 25x + 42 = 4x^2 + 8x + 4\,;$

$x^2 - 17x - 38 = 0\,;$

$\Delta = (-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-38) = 289 + 152 = 441\,;$ $\quad x_{1,2} = \dfrac{17 \mp \sqrt{441}}{2 \cdot 1} = \begin{matrix} x_1 = \dfrac{17-21}{2} = -\dfrac{4}{2} = -2 \\ x_2 = \dfrac{17+21}{2} = +\dfrac{38}{2} = +19 \end{matrix}$

$$\begin{cases} x \leq -1 \quad (2) \\ x_1 = -2 \quad \vee \quad x_2 = 19 \end{cases}$$

Affinché una soluzione sia accettabile, deve soddisfare sia le condizioni di esistenza (1) *, sia la condizione di concordanza di segno* (2) .

Ossia: $\begin{cases} x \geq -\frac{7}{3} \\ x \leq -1 \end{cases}$ $\quad$ *osssia* $\quad -\frac{7}{3} \leq x \leq -1$ $\quad$ *Pertanto soltanto la soluzione* $x_1 = -2$ *è accettabile.*

In conclusione, l'insieme delle soluzioni dell'equazione è $\boldsymbol{S = \{-2\}}$.

Esempio 11

$\boldsymbol{\sqrt{2x+8} = 3 - \sqrt{3x+7}}$

Determiniamo le condizioni di esistenza: $\begin{cases} 2x+8 \geq 0 \\ 3x+7 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -4 \\ x \geq -\dfrac{7}{3} \end{cases}$ $x \geq -\dfrac{7}{3}$ (1)

Riscriviamo l'equazione in modo da assicurare la concordanza di segno:

$\sqrt{2x+8} + \sqrt{3x+7} = 3$;

Eleviamo ambo i membri al quadrato, si ottiene:

$\left(\sqrt{2x+8} + \sqrt{3x+7}\right)^2 = 3^2$;

$2x+8+3x+7+2\sqrt{(2x+8)(3x+7)} = 9$;

$5x+15+2\sqrt{6x^2+14x+24x+56} = 9$;

$2\sqrt{6x^2+38x+56} = -5x-15+9$;

$2\sqrt{6x^2+38x+56} = -5x-6$;

Risolviamo tale equazione imponendo la condizione di concordanza di segno: $-5x-6 \geq 0$

$$\begin{cases} 5x+6 \leq 0 \\ \left(2\sqrt{6x^2+38x+56}\right)^2 = (-5x-6)^2 \end{cases}$$

Risolviamo:

$\left(2\sqrt{6x^2+38x+56}\right)^2 = (-5x-6)^2$; $4(6x^2+38x+56) = 25x^2+60x+36$;

$24x^2+152x+224-25x^2-60x-36 = 0$; $-x^2+92x+188 = 0$; $x^2-92x-188 = 0$;

$\dfrac{\Delta}{4} = (-46)^2 - 1\cdot(-188) = 2116+188 = 2304$; $x_{1,2} = \dfrac{46 \mp \sqrt{2304}}{1} =$ $x_1 = 46-48 = -2$, $x_2 = 46+48 = +94$

$$\begin{cases} x \leq -\dfrac{6}{5} \quad (2) \\ x_1 = -2 \quad \vee \quad x_2 = 19 \end{cases}$$

Affinché una soluzione sia accettabile, deve soddisfare sia le condizioni di esistenza (1) *, sia la condizione di concordanza di segno* (2) .

Ossia: $\begin{cases} x \geq -\frac{7}{3} \\ x \leq -\frac{6}{5} \end{cases}$ *osssia* $-\frac{7}{3} \leq x \leq -\frac{6}{5}$ *Pertanto soltanto la soluzione* $x_1 = -2$ *è accettabile.*

In conclusione, l'insieme delle soluzioni dell'equazione è $\boldsymbol{S = \{-2\}}$.