Equazioni letterali fratte di I° grado

Un'equazione letterale fratta è un'equazione fratta che contiene, oltre la lettera che rappresenta l'incognita dell'equazione, altre lettere, dette parametri, che rappresentano numeri ben determinati, cioè aventi valore costante ma non indicato.

La risoluzione di un'equazione letterale fratta, detta discussione, consiste nel determinare come variano le sue soluzioni al variare dei valori assunti dai parametri che in essa compaiono.

Per risolvere un'equazione letterale fratta occorre:

1. Scomporre in fattori i denominatori e calcolare il m.c.m.
2. Determinare le condizioni di esistenza, cioè quei valori dei parametri che fanno perdere di significato l'equazione (per tali valori non ha senso risolvere l'equazione)
3. Determinare le condizioni di accettabilità delle incognite. Tali condizioni sono utilizzate nella fase finale della discussione per stabilire l'accettabilità delle soluzioni trovate.
4. Ridurre l'equazione a forma normale e studiare i vari casi:
   - equazione che perde significato
   - equazione determinata
   - equazione indeterminata
   - equazione impossibile
5. Discutere le soluzioni trovate confrontandole con le condizioni di accettabilità delle incognite *(punto3)*
6. Effettuare il riepilogo finale.

Esempio 1

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{a}=0$$

Condizione di esistenza: $a \neq 0$ *. Per* $a = 0$ *l'equazione perde significato*

Condizione di accettabilità: $x \neq 0$

Riduzione a forma normale:
moltiplicando per: $ax \neq 0$ *si ha:* $a + x = 0$

Determinazione delle soluzioni: $x = -a$

Discussione:

Non esiste alcun valore del parametro a per cui l'equazione risulti indeterminata o impossibile.

Verifica dell'accettabilità della soluzione $x = -a$ *trovata.*

Per la condizione di accettabilità, tale soluzione è accettabile se diversa da 0 *.*

Imponendo tale condizione si ha: $-a \neq 0$ *cioè:* $a \neq 0$ *.*

Riepilogando:

Valore del parametro	Tipo di Equazione	Soluzioni
$a = 0$	*Equazione che perde significato*	$-$
$a \neq 0$	*Equazione determinata*	$x = -a$

Esempio 2

$$\frac{a}{x+1}=a+1$$

Condizione di accettabilità: $x \neq -1$

Riduzione a forma normale:

moltiplicando per: $x + 1 \neq 0$ *si ha:* $a = (a + 1)(x + 1)\,;\quad a = ax + a + x + 1\,;$

$(a + 1)\, x = -1$

Discussione:

Se $a + 1 = 0\,;\ a = -1 \ \Rightarrow\ 0x = -1$ *equazione impossibile.*

Se $a + 1 \neq 0\,;\ a \neq -1 \ \Rightarrow \qquad x = -\frac{1}{a+1}$

Per la condizione di accettabilità, tale soluzione è accettabile se diversa da -1 *.*

Imponendo tale condizione si ha:

$-\frac{1}{a+1} \neq -1\,;\quad \frac{1}{a+1} \neq 1\,;\quad a + 1 \neq 1\,;\quad a \neq 0$.

Riepilogando:

Valore del parametro	Tipo di Equazione	Soluzioni
$a = -1$	*Equazione impossibile*	$\nexists\, x \in R$
$a \neq 0 \quad \wedge \quad a \neq -1$	*Equazione determinata*	$x = -\dfrac{1}{a+1}$

Esempio 3

$$\frac{2a}{x-3}+\frac{x^2}{x^2-9}=\frac{x-a}{x+3}$$

$$\frac{2a}{x-3}+\frac{x^2}{(x+3)(x-3)}=\frac{x-a}{x+3}$$

Condizione di esistenza: $\forall a \in R \quad \Rightarrow$ *l'equazione non perde mai significato.*

Condizione di accettabilità: $x \neq \mp 3$.

Riduzione a forma normale:
moltiplicando per $(x+3)(x-3)$ *si ha:* $2a(x+3)+x^2=(x-a)(x-3)$ *;*

$2ax+6a+x^2=x^2-3x-ax+3a$ *;* $3ax+3x=-3a$ *;* $3(a+1)x=-3a$ *;* $(a+1)x=-a$ *;*

Discussione:
se $a+1=0$ *cioè se* $a=-1$ *si ha:* $0\,x=1$ *equazione impossibile.*
se $a+1\neq 0$ *si ha:* $x=-\frac{a}{a+1}$

Per la condizione di accettabilità, tale soluzione è accettabile se diversa da -3 *e diversa da* $+3$.

Imponendo tali condizioni si ha:

$-\frac{a}{a+1}\neq -3$ *;* $\frac{a}{a+1}\neq 3$ *;* $a\neq 3a+3$ *;* $2a\neq -3$ *;* $a\neq -\frac{3}{2}$.

$-\frac{a}{a+1}\neq 3$ *;* $-a\neq 3a+3$ *;* $4a\neq -3$ *;* $a\neq -\frac{3}{4}$.

Riepilogando:

Valore del parametro	**Tipo di Equazione**	**Soluzioni**
$a=-1 \quad \vee \quad a=-\frac{3}{2} \quad \vee \quad a=-\frac{3}{4}$	*Equazione impossibile*	$\nexists\, x \in R$
$a\neq -1 \quad \wedge \quad a\neq -\frac{3}{2} \quad \wedge \quad a\neq -\frac{3}{4}$	*Equazione determinata*	$x=-\dfrac{a}{a+1}$

Esempio 4

$$\frac{2x-a}{a}-\frac{x+a}{3a}=1-\frac{x}{2}$$

Condizione di esistenza: $a\neq 0$. *Per* $a=0$ *l'equazione perde significato.*

$6(2x-a)-2(x+a)=6a-3ax$; $12x-6a-2x-2a-6a+3ax=0$;

$(10+3a)x=14a$.

Discussione:
se $a=-\frac{10}{3}$ *si ha:* $0x=-\frac{140}{3}$ *equazione impossibile.*
se $a\neq -\frac{10}{3} \quad \wedge \quad a\neq 0$ *si ha:* $x=\frac{14a}{10+3a}$

Riepilogando:

Valore del parametro	**Tipo di Equazione**	**Soluzioni**
$a=0$	*Equazione che perde significato*	$-$
$a=-\dfrac{10}{3}$	*Equazione impossibile*	$\nexists\, x \in R$
$a\neq 0 \quad \wedge \quad a\neq -\frac{10}{3}$	*Equazione determinata*	$x=\dfrac{14a}{10+3a}$

Esempio 5

$$\frac{ax}{x^2-2x+1}-\frac{2a}{x-1}=0$$

$$\frac{ax}{(x-1)^2}-\frac{2a}{x-1}=0$$

Condizione di accettabilità: $x \neq 1$.

Per $x \neq 1$ *si ottiene:* $ax-2a(x-1)=0\,;\quad ax—2ax+2a=0\,;\quad -ax=-2a\,;\quad ax=2a$

Se $a=0$ *si ottiene:* $0x=0$ *equazione indeterminata*

Se $a \neq 0$ *; l'equazione è determinata, con* $x=\frac{2a}{a}=2$ *. Soluzione è accettabile perché diversa da* $x=1$ *.*

Riepilogando:

Valore del parametro	**Tipo di Equazione**	**Soluzioni**
$a=0$	*Equazione indeterminata*	$\forall\, x\ \in R$
$a \neq 0$	*Equazione determinata*	$x=2$

Esempio 6

$$\frac{3a}{(a-1)(x+2)}-\frac{5}{a-1}=\frac{2x}{x+2}+1$$

Condizione di esistenza: $a \neq 1$ *. Per* $a=1$ *l'equazione perde significato*

Condizione di accettabilità: $x \neq -2$.

Moltiplicando per il $m.c.m.=(a-1)(x+2)\neq 0$ *si ha:*

$3a-5(x+2)=2x(a-1)+(x+2)(a-1)\ \ \ldots$

$\boxed{(2+3a)x=a-8}$

Se $a=-\frac{2}{3}\quad\Rightarrow\quad ox=-\frac{26}{3}$ *equazione impossibile*

Se $a\neq-\frac{2}{3}\quad\wedge\quad a\neq 1\quad\Rightarrow\quad x=\frac{a-8}{2+3a}$

Ricordando la condizione di accettabilità: $x\neq-2$ *, la soluzione* $x=\frac{a-8}{2+3a}$ *è accettabile se diversa da* -2 *.*

Cioè se $\frac{a-8}{2+3a}\neq-2\,;\quad a-8\neq-2(2+3a)\,;\quad a-8\neq-4-6a\,;\quad a\neq\frac{4}{7}$

Riepilogando:

Valore del parametro	**Tipo di equazione**	**Soluzioni**
$a=1$	*Equazione che perde significato*	$-$
$a=-\frac{2}{3}$	*Equazione impossibile*	$\nexists\, x\in R$
$a\neq 1\quad\wedge\quad a\neq-\frac{2}{3}\quad\wedge\quad a\neq\frac{4}{7}$	*Equazione determinata*	$x=\frac{a-8}{2+3a}$

Esempio 7

$$\frac{x}{x+a}-\frac{a}{x-a}=\frac{x^2}{(x+a)(x-a)}$$

Condizione di esistenza e di accettabilità coesistono: $x \neq -a \;\; e \;\; x \neq a$

Moltiplicando per il $m.c.m. = (x-a)(x+a) \neq 0$ *si ha:* $2ax = -a^2$

Se $a = 0 \;\; \Rightarrow \;\; 0x = 0$ *equazione indeterminata.*

Se $a \neq 0 \;\; \Rightarrow \;\; x = -\frac{a^2}{2a} = -\frac{a}{2}$.

Ricordando le condizioni di accettabilità e di esistenza: $x \neq -a \;\; e \;\; x \neq a$,

la soluzione $x = -\frac{a}{2}$ *è accettabile se diversa da* $-a$ *e da* a .

Dalla prima si ha: $-\frac{a}{2} \neq -a\,; \quad -a \neq -2a\,; \quad a \neq 0$

Dalla seconda si ha: $-\frac{a}{2} \neq a\,; \quad -a \neq 2a\,; \quad a \neq 0$

Pertanto la soluzione $x = -\frac{a}{2}$ *è accettabile se* $a \neq 0$

Valore del parametro	**Tipo di equazione**	**Soluzioni**
$a = 0$	*Equazione indeterminata*	$\forall\, x \in R$
$a \neq 0$	*Equazione determinata*	$x = -\dfrac{a}{2}$

Esempio 8

$$\frac{1}{x-2a+1}+\frac{x}{x+2a-1}=1$$

Condizione di esistenza e di accettabilità coesistono: $x \neq 2a-1 \;\; e \;\; x \neq -2a+1$

Moltiplicando per il $m.c.m. = (x-2a+1)(x+2a-1) \neq 0$ *si ha:* $(1-a)x = -2a^2 + a$

Se $a = 1 \;\; \Rightarrow \;\; 0x = -1$ *equazione impossibile.*

Se $a \neq 1 \;\; \Rightarrow \;\; x = \frac{-2a^2+a}{1-a}$

Ricordando le condizioni di accettabilità e di esistenza: $x \neq 2a-1 \;\; e \;\; x \neq -2a+1$,

la soluzione $x = \frac{-2a^2+a}{1-a}$ *è accettabile se diversa da* $2a-1$ *e da* $-2a+1$.

Cioè se: $\frac{-2a^2+a}{1-a} \neq 2a-1 \;\; e \;\; \frac{-2a^2+a}{1-a} \neq -2a+1$

Dalla prima si ha: $-2a^2 + a \neq (2a-1)(1-a) \;\; ; \ldots \; a \neq \frac{1}{2}$

Dalla seconda si ha: $-2a^2 + a \neq (-2a+1)(1-a) \;\; ; \ldots \; (2a-1)^2 \neq 0\,; \;\; a \neq \frac{1}{2}$.

Pertanto la soluzione $x = \frac{-2a^2+a}{1-a}$ *è accettabile se* $a \neq \frac{1}{2}$.

Valore del parametro	**Tipo di equazione**	**Soluzioni**
$a = 1 \quad \vee \quad a = \frac{1}{2}$	*Equazione impossibile*	$\nexists\, x \in R$
$a \neq 1 \quad \wedge \quad a \neq \frac{1}{2}$	*Equazione determinata*	$x = \dfrac{-2a^2+a}{1-a}$

Esempio 9

$$\frac{b-x}{a}-4=\frac{a-x}{b}$$

Condizione di esistenza: $a \neq 0$ *e* $b \neq 0$*. Per* $a = 0$ *oppure* $b = 0$ *l'equazione perde significato.*

Moltiplicando per il $m.c.m. = ab \neq 0$ *si ha:* $b^2 - bx - 4ab = a^2 - ax$ *;* $-bx + ax = a^2 - b^2 + 4ab$ *;*

$(a-b)x = a^2 - b^2 + 4ab$ *;*

Se $a = b \Rightarrow 0x = 4a^2$ *. Essendo, per le condizioni di esistenza,* $a \neq 0$ *, l'equazione è impossibile.*

Se $a \neq b \Rightarrow x = \frac{a^2-b^2+4ab}{a-b}$

Riepilogando:

Valore del parametro	**Tipo di equazione**	**Soluzioni**
$a = 0 \quad \vee \quad b = 0$	*Equazione che perde significato*	$-$
$a \neq 0 \quad \wedge \quad b \neq 0 \quad \wedge \quad a = b$	*Equazione impossibile*	$\nexists\, x \in R$
$a \neq 0 \quad \wedge \quad b \neq 0 \quad \wedge \quad a \neq b$	*Equazione determinata*	$x = \dfrac{a^2-b^2+4ab}{a-b}$