Equazioni di II grado

Equazione di II grado completa

Un'equazione di II° grado è un'equazione che, ridotta a forma normale, è del tipo $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$ $(a \neq 0)$

Per risolverla occorre calcolare il discriminante dell'equazione $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4\,a\,c}$.

- Se $\Delta > \boldsymbol{0}$ l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte $\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}}$
- Se $\Delta = \boldsymbol{0}$ l'equazione ammette due soluzioni reali e coincidenti $\boldsymbol{x_{1,2} = -\frac{b}{2a}}$
- Se $\Delta < \boldsymbol{0}$ l'equazione non ammette soluzioni reali $\nexists \boldsymbol{x \in R}$

Dimostrazione

Data l'equazione: $ax^2+bx+c=0$ *dividiamo tutti i termini per* $a \neq 0$ *:*

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ *aggiungiamo e sottraiamo* $\frac{b^2}{4a^2}$

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$ *raggruppiamo il quadrato di binomio*

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ *effettuiamo i calcoli a secondo membro*

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ *poniamo* $\Delta = b^2 - 4ac$

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ *Distinguiamo i tre casi:*

$$\begin{cases} Se \quad \Delta > 0 \quad \Rightarrow \quad x + \dfrac{b}{2a} = \pm\sqrt{\dfrac{\Delta}{4a^2}}\ ; \quad x = -\dfrac{b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\ ; \quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ Se \quad \Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = -\dfrac{b}{2a} \\ Se \quad \Delta < 0 \quad \Rightarrow \quad \nexists x \in R \end{cases}$$

Esempio 1

$2x^2 - 3x + 1 = 0\ ;\qquad a = 2\ ;\quad b = -3\ ;\quad c = 1\ .$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 \qquad x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \mp \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \begin{matrix} x_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{3+1}{4} = 1 \end{matrix}$

Esempio 2

$4x^2 - 12x + 9 = 0\ ;\qquad a = 4\ ;\quad b = -12\ ;\quad c = 9\ .$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12 \mp \sqrt{0}}{2 \cdot 4} = \begin{matrix} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{3}{2} \end{matrix}$

Oppure $4x^2 - 12x + 9 = 0\ ;\qquad (2x-3)^2 = 0\ ;\qquad (2x-3)\cdot(2x-3) = 0\ ;\qquad \begin{matrix} 2x - 3 = 0\ ; & x = \frac{3}{2} \\ 2x - 3 = 0\ ; & x = \frac{3}{2} \end{matrix}$

Esempio 3

$3x^2 - 4x + 2 = 0\ ;\qquad a = 3\ ;\quad b = -4\ ;\quad c = 2\ .$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 16 - 24 = -8 < 0 \qquad \nexists x \in \mathrm{R}\ .$

Formula ridotta

Se il coefficiente b è un numero pari, è utile applicare la formula ridotta:

$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}} \qquad \frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - a\,c$$

Dimostrazione

Consideriamo la formula risolutiva $x_{1,2} = \frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b\mp\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2a}$ *raccogliamo 4 sotto il segno di radice*

$$x_{1,2} = \frac{-b\mp\sqrt{4\left(\frac{b^2}{4}-a\,c\right)}}{2a} = \frac{-b\mp\sqrt{4}\cdot\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-a\,c}}{2a} = \frac{-b\mp2\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-a\,c}}{2a}$$

dividiamo numeratore e denominatore per 2

$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-a\,c}}{a}$ *ponendo* $\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - a\,c$ *si ottiene* $x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2}\mp\sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}$

Esempio

$2x^2 - 4\sqrt{3}\,x + 5 = 0\,;\qquad a = 2\,;\qquad b = -4\sqrt{3}\,;\qquad c = 5\,.$

$$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - a\,c = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 - 2\cdot5 = 12 - 10 = 2$$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2}\mp\sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} = \frac{4\sqrt{3}\mp\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{4\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} \\ x_2 = \dfrac{4\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Formula ridottissima

Se il coefficiente b è un numero pari e $a = 1$ è utile applicare la formula ridottissima:

$$\boldsymbol{x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}} \qquad \frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - a\,c$$

Esempio

$x^2 - 8x + 10 = 0\,;\qquad a = 1\,;\qquad b = -8\,;\qquad c = 10\,.$

$$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - a\,c = (-4)^2 - 1\cdot10 = 6$$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2}\mp\sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} = \frac{4\mp\sqrt{6}}{2\cdot2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{3+1}{4} = 1 \end{cases}$$

Equazione incompleta pura

Se $b = 0$ l'equazione $\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$ è detta incompleta pura.

Se a e c sono discordi, l'equazione ammette due soluzioni reali e opposte $\quad x_{1,2} = \mp\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Se a e c sono concordi, l'equazione non ammette soluzioni reali $\quad \boldsymbol{\nexists x \in R}$

Esempi

$4x^2 - 9 = 0\,; \qquad 4x^2 = 9\,; \qquad x^2 = +\frac{9}{4}\,; \qquad x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2}$

$4x^2 + 9 = 0\,; \qquad 4x^2 = -9\,; \qquad x^2 = -\frac{9}{4}\,; \qquad \nexists x \in R$

Equazione incompleta spuria

Se $c = 0$ l'equazione $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$ è detta incompleta spuria.

Essa ha sempre una soluzione $x = 0$.

Per risolverla occorre:

1. raccogliere a fattor comune l'incognita x
2. applicare la legge dello annullamento del prodotto $x \cdot (ax + b) = 0 \qquad \begin{matrix} x = 0 \\ ax + b = 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{b}{a} \end{matrix}$

Esempio

$4x^2 - 9x = 0\,; \qquad x \cdot (4x - 9) = 0\,; \qquad \begin{matrix} x = 0 \\ 4x - 9 = 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{9}{4} \end{matrix}$

Equazione incompleta monomia

Se $b = 0 \;\wedge\; c = 0$ l'equazione $\boldsymbol{ax^2 = 0}$ è detta incompleta monomia.

Essa ha la soluzione doppia $\boldsymbol{x_{1,2} = 0}$.

Esempio

$5x^2 = 0\,; \qquad x_{1,2} = 0$

Relazioni fra le radici e i coefficienti di un'equazione di II grado

Data l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0 \quad \wedge \quad \Delta \geq 0$:

la somma delle radici è	il prodotto delle radici
$\boldsymbol{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$	$\boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$

Dimostrazione 1

$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$

Dimostrazione 2

$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4\,a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4\,a^2} = \frac{b^2-(b^2-4\,a\,c)}{4\,a^2} = \frac{4ac}{4\,a^2} = \frac{c}{a}$

Relazioni fra la somma e il prodotto delle radici e l'equazione di II grado

Siano x_1 *e* x_2 le soluzioni dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$	$\Longrightarrow$	$\boldsymbol{x^2 - s\,x + p = 0}$	$s = x_1 + x_2$ $p = x_1 \cdot x_2$

Dimostrazione

Data l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ *con* $a \neq 0 \quad \wedge \quad \Delta \geq 0$, *dividiamo tutti i termini per* $a \neq 0$

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$; $\quad x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$ *ricordando che* $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ *e* $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$ *ponendo* $x_1 + x_2 = s$ *e* $x_1 \cdot x_2 = p$

$x^2 - s\,x + p = 0$

Costruzione dell'equazione di II grado che ammette radici assegnate

Se si vuole determinare un'equazione che abbia come soluzioni i due numeri reali x_1 e x_2 , basta risolvere: $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$.

Esempio

Determinare l'equazione che ha come radici i numeri 3 e 5.

Soluzione 1

L'equazione si ottiene scrivendo: $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$

$(x - 3) \cdot (x - 5) = 0$; $\quad x^2 - 5x - 3x + 15 = 0$; $\quad x^2 - 8x + 15 = 0$

Soluzione 2

Applicando la formula $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$ *si ha:*

$x^2 - (3 + 5)x + 3 \cdot 5 = 0$; $\quad x^2 - 8x + 15 = 0$

Fattorizzazione del trinomio di II grado

Dato il polinomio $ax^2 + bx + c$
se l'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$
ha $a \neq 0 \quad \wedge \quad \Delta \geq 0$

$\Longrightarrow$

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c \; = \; a(x - x_1)(x - x_2)}$$

Dimostrazione

Dato il trinomio $ax^2 + bx + c$

Se $\Delta > 0$ *raccogliendo a fattor comune* $a \neq 0$

$$ax^2 + bx + c \; = \; a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \; = \; a \cdot \left[x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right] =$$

$$= \; a \cdot [x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2] \; = \; a \cdot (x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 \cdot x_2) = \; a \cdot [x \cdot (x - x_1) - x_2 \cdot (x - x_1)] =$$

$$= \; a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)\,.$$

Casi particolari

Se $\boldsymbol{\Delta = 0} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{ax^2 + bx + c \; = \; a \cdot (x - x_1)^2}$

Se $\Delta < 0$ il trinomio è irriducibile.

Esempio 1

$3x^2 - 5x + 2$

$$3x^2 - 5x + 2 = 0; \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1\,; \qquad x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \mp \sqrt{1}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \mp 1}{6} \; = \begin{array}{l} \dfrac{5-1}{6} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{5+1}{6} = 1 \end{array}$$

Pertanto: $3x^2 - 5x + 2 \; = \; 3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x - 1) \; = \; (3x - 2)(x - 1)$

Esempio 2

$4x^2 - 3x - 2$

$$4x^2 - 3x - 2 = 0\,; \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2) = 41\,; \qquad x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \mp \sqrt{41}}{2 \cdot 4} \; = \begin{array}{l} \dfrac{3-\sqrt{41}}{8} \\ \dfrac{3+\sqrt{41}}{8} \end{array}$$

Pertanto:

$$4x^2 - 3x - 2 \; = \; 4\left(x - \frac{3 - \sqrt{41}}{8}\right)\left(x - \frac{3 + \sqrt{41}}{8}\right)$$

Esempio 3

$4x^2 - 12x + 9$

$$4x^2 - 12x + 9 = 0\,; \qquad \Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0\,; \qquad x_{1,2} = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{2 \cdot 4} = \frac{3}{2}$$

Pertanto: $4x^2 - 12x + 9 \; = \; 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \; = \; 2^2 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \; = \; \left[2\left(x - \frac{3}{2}\right)\right]^2 \; = \; (2x - 3)^2$

La regola dei segni di Cartesio

Se un'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ ha soluzioni reali, è possibile determinare i segni di tali soluzioni senza risolvere l'equazione.

È sufficiente analizzare i segni dei coefficienti a, b, c dell'equazione, come nel procedimento sotto illustrato:

$\Delta > 0$	a	b	c	$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$	**Conclusioni**
	+	**+**	**+**	**+**	**-**	*Le due soluzioni sono negative*
	+	**-**	**+**	**+**	**+**	*Le due soluzioni sono positive*
	+	**+**	**-**	**-**	**-**	*Una soluzione positiva e una soluzione negativa* *la soluzione negativa ha valore assoluto maggiore*
	+	**-**	**-**	**-**	**+**	*Una soluzione positiva e una soluzione negativa* *la soluzione positiva ha valore assoluto maggiore*

Si dice che c'è una permanenza fra due segni consecutivi dei coefficienti a, b e c se essi sono concordi.
Si dice che c'è una variazione fra due segni consecutivi dei coefficienti a, b e c se essi sono discordi.

Dall'esame della tabella si conclude che:

In un'equazione di secondo grado, che ha soluzioni reali, ad ogni permanenza corrisponde una soluzione negativa e ad ogni variazione una soluzione positiva. Il valore assoluto della positiva è maggiore del valore assoluto della negativa se la variazione precede la permanenza, in caso contrario il valore assoluto della negativa è maggiore del valore assoluto della positiva.

Se $\Delta = 0$ il trinomio $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}$ è un quadrato di binomio e le due soluzioni coincidono. I loro segni sono o entrambi positivi o entrambi negativi.

Esempio 1

L'equazione $3x^2 - 5x + 2 = 0$ ha:

- il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1 > 0$
- presenta due variazioni $(+3, -5, +2)$.

Pertanto l'equazione ha due soluzioni positive.

Esempio 2

L'equazione $5x^2 - 3x - 2 = 0$ ha:

- il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2) = 49 > 0$
- presenta una variazione e una permanenza $(+5, -3, -2)$.

Pertanto l'equazione ha una soluzione positiva e una soluzione negativa. Il valore assoluto della positiva è maggiore del valore assoluto della negativa

Esempio 3

L'equazione $2x^2 + 5x + 2 = 0$ ha:

- il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9 > 0$
- presenta due permanenze $(+2, +5, +2)$.

Pertanto l'equazione ha due soluzioni negative.

Esempio 4

L'equazione $2x^2 + 3x - 5 = 0$ ha:

- il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 49 > 0$
- presenta una permanenza e una variazione $(+2, +3, -5)$.

Pertanto l'equazione ha una soluzione positiva e una soluzione negativa. Il valore assoluto della negativa è maggiore del valore assoluto della positiva.