Equazioni di grado superiore al II°

Equazioni binomie

Un'equazione binomia è un'equazione che, ridotta a forma normale, è del tipo $ax^n + b = 0$.

Per risolvere una tale equazione, volendo cercare anche le soluzioni complesse, occorre:

a. scomporre l'equazione in fattori
b. applicare la legge dell'annullamento del prodotto.

Osservazione
Se l'esponente **n** è pari, ed **a** e **b** sono discordi, ha due soluzioni reali ed opposte, le altre sono complesse.
Se l'esponente **n** è pari, ed **a** e **b** sono concordi, l'equazione ha solo soluzioni complesse.
Se l'esponente **n** è dispari, ha sempre una sola soluzione reale, le altre sono complesse.

Esempio 1

$$5x^3 - 40 = 0; \quad x^3 - 8 = 0; \quad (x-2)\cdot(x^2+2x+4) = 0; \quad \begin{matrix} x-2=0 \\ x^2+2x+4=0 \end{matrix} \quad \boxed{x_1 = 2}$$

$$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 1-4 = -3 \qquad x_{2,3} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{1} = -1 \pm \sqrt{-3} = \boxed{-1 \pm i\sqrt{3}}$$

Esempio 2

$$2x^3 + 54 = 0; \quad x^3 + 27 = 0; \quad (x+3)\cdot(x^2-3x+9) = 0; \quad \begin{matrix} x+3=0 \\ x^2-3x+9=0 \end{matrix} \quad \boxed{x_1 = -3}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9-36 = -27 \qquad x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{-27}}{2} = \frac{3 \pm 3\sqrt{-3}}{2} = \boxed{\frac{3}{2} \pm i\frac{3}{2}\sqrt{3}}$$

Esempio 3

$$3x^4 - 48 = 0; \quad x^4 - 16 = 0; \quad (x^2+4)\cdot(x^2-4) = 0; \quad \begin{matrix} x^2-4=0 & x_1 = \pm\sqrt{4} \\ x^2+4=0 & x_2 = \pm\sqrt{-4} \end{matrix} \quad \boxed{\begin{matrix} = \pm 2 \\ = \pm 2i \end{matrix}}$$

Esempio 4

$$3x^6 - 192 = 0; \quad x^6 - 64 = 0; \quad (x^3+8)\cdot(x^3-8) = 0;$$

$$(x+2)\cdot(x^2-2x+4)\cdot(x-2)\cdot(x^2+2x+4) = 0; \quad \begin{matrix} x+2=0 \\ x-2=0 \\ x^2+2x+4=0 \\ x^2-2x+4=0 \end{matrix} \quad \boxed{\begin{matrix} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \\ x_{3,4} = -1 \pm i\sqrt{3} \\ x_{5,6} = 1 \pm i\sqrt{3} \end{matrix}}$$

Equazioni trinomie

Un'equazione trinomia è un'equazione che, ridotta a forma normale, è del tipo $ax^{2n}+bx^{n}+c=0$ con $a\neq 0$ e $n\in N$

Per risolvere una tale equazione occorre:

a. porre $x^{n}=z$
b. risolvere l'equazione di II° grado ottenuta $az^{2}+bz+c=0$
c. sostituire le soluzioni trovate z_1 e z_2 in $x^{n}=z$ e ricavare le soluzioni $x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots$

Esempio

$$8x^{6}-15x^{3}-2=0$$

Si pone $x^{3}=z$; $8z^{2}-15z-2=0$; $\Delta=b^{2}-4ac = 225+64 = 289$

$$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{15\pm\sqrt{289}}{16}=\frac{15\pm 17}{16}=\begin{matrix} z_1=-\dfrac{1}{8} \\ z_2=2 \end{matrix}$$

$$z_1=-\frac{1}{8};\quad x^{3}=-\frac{1}{8};\quad x^{3}+\frac{1}{8}=0;\quad \left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x^{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)=0\quad \begin{matrix} x_1+\dfrac{1}{2}=0 \\ x^{2}-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}=0 \end{matrix}\quad \boxed{x_1=-\frac{1}{2}}$$

$$4x^{2}-2x+1=0;\quad \frac{\Delta}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^{2}-ac = 1-4 = -3;\qquad x_{2,3}=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{4}=\boxed{\frac{1\pm i\sqrt{3}}{4}}$$

$$z_2=2;\quad x^{3}=2;\quad x^{3}-2=0;\quad \left(x-\sqrt[3]{2}\right)\cdot\left(x^{2}+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4}\right)=0\quad \begin{matrix} x_1-\sqrt[3]{2}=0 \\ x^{2}+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4}=0 \end{matrix}\quad \boxed{x_4=\sqrt[3]{2}}$$

$$x^{2}+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4}=0;\quad \Delta=b^{2}-4ac = \sqrt[3]{4}-4\sqrt[3]{4} = -3\sqrt[3]{4}$$

$$x_{5,6}=\frac{-\sqrt[3]{2}\pm\sqrt{-3\sqrt[3]{4}}}{2}=\frac{-\sqrt[3]{2}\pm i\sqrt{\sqrt[3]{108}}}{2}=\boxed{\frac{-\sqrt[3]{2}\pm i\sqrt[6]{108}}{2}}$$

Equazioni reciproche

Un'equazione reciproca è un'equazione che, ridotta a forma normale, ha i coefficienti dei termini estremi e di quelli equidistanti dagli estremi, uguali od opposti,
cioè del tipo $ax^{n}+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots\pm cx^{2}\pm bx\pm a=0$

L'equazione reciproca si dice di ***I^a^ specie*** quando i coefficienti dei termini estremi e di quelli equidistanti dagli estremi sono uguali.
L'equazione reciproca si dice di ***II^a^ specie*** quando i coefficienti dei termini estremi e di quelli equidistanti dagli estremi sono opposti..

Un'equazione reciproca ammette sempre soluzioni reciproche $\left(Esempio: \dfrac{3}{4}\quad \text{e}\quad \dfrac{4}{3}\right)$.

Equazioni reciproche di III° grado di I^a^ specie

Un'equazione reciproca di terzo grado di I^a^ specie è un'equazione che, ridotta a forma normale, è del tipo $ax^3+bx^2+bx+a=0$. Essa ammette sempre almeno la soluzione $x=-1$.

Per risolvere una tale equazione occorre:

a. scomporre l'equazione in fattori *(Raccoglimento a fattor comune parziale oppure Metodo di Ruffini)*
b. applicare la legge dell'annullamento del prodotto

Esempio

$$2x^3-3x^2-3x+2=0$$

Si applica il Metodo di Ruffini:

	2	−3	−3	2
−1		−2	5	−2
	2	−5	2	=

l'equazione si scompone in :

$(x+1)\cdot(2x^2-5x+2)=0$; $x+1=0$ $\boxed{x_1=-1}$

$2x^2-5x+2=0$

$\Delta=b^2-4ac = 25-16 = 9$; $x_{2,3}=\dfrac{5\pm\sqrt{9}}{4}=\dfrac{5\pm3}{4}=$ $\boxed{x_2=\dfrac{1}{2}}$ $\boxed{x_3=2}$

Equazioni reciproche di III° grado di II^a^ specie

Un'equazione reciproca di terzo grado di II^a^ specie è un'equazione che, ridotta a forma normale, è del tipo $ax^3+bx^2-bx-a=0$ Essa ammette sempre almeno la soluzione $x=1$.

Per risolvere una tale equazione occorre:

a. scomporre l'equazione in fattori *(Raccoglimento a fattor comune parziale oppure Metodo di Ruffini)*
b. applicare la legge dell'annullamento del prodotto

Esempio

$$6x^3-19x^2+19x-6=0$$

Si applica il Metodo di Ruffini:

	6	−19	19	−6
1		6	−13	6
	6	−13	6	=

l'equazione si scompone in :

$(x-1)\cdot(6x^2-13x+6)=0$; $x-1=0$ $\boxed{x_1=1}$

$6x^2-13x+6=0$

$\Delta=b^2-4ac = 169-144 = 25$; $x_{1,2}=\dfrac{13\pm\sqrt{25}}{12}=\dfrac{13\pm5}{12}=$ $\boxed{x_1=\dfrac{2}{3}}$ $\boxed{x_2=\dfrac{3}{2}}$

Equazioni reciproche di IV° grado di I^a specie

Un'equazione reciproca di quarto grado di I^a specie è un'equazione che, ridotta a forma normale, è del tipo: $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$.

Essa si risolve come nell'esempio seguente.

Esempio

$3x^4-15x^3+6x^2-15x+3=0$

Non essendo $x=0$ soluzione dell'equazione si dividono tutti i termini per x^2 :

$3x^2-15x+6-\frac{15}{x}+\frac{3}{x^2}=0$

Si raccolgono i coefficienti dei termini estremi e di quelli equidistanti dagli estremi :

$3\cdot\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-15\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0 \quad (*)$

Si pone $x+\frac{1}{x}=z \quad \Rightarrow \quad z^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$ cioè $z^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$

Da cui si ottiene $z^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$

Sostituendo nell'equazione $(*)$ $\boxed{x+\frac{1}{x}=z}$ e $\boxed{z^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}}$ si ha:

$3\cdot\left(z^2-2\right)-15z+6=0; \quad 3z^2-6-15z+6=0; \quad 3z^2-15z=0; \quad z\cdot(z-5)=0; \quad \begin{matrix} z_1=0 \\ z_2=5 \end{matrix}$

Sostituendo in $x+\frac{1}{x}=z$ si ha:

$x+\frac{1}{x}=z_1; \quad x+\frac{1}{x}=0; \quad x^2+1=0; \quad x^2=-1; \quad \boxed{x_{1,2}=\pm i}$

$x+\frac{1}{x}=z_2; \quad x+\frac{1}{x}=5; \quad x^2+1=5x; \quad x^2-5x+1=0; \quad \Delta=25-4=21; \quad \boxed{x_{3,4}=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}}$

Equazioni reciproche di IV° grado di II^a specie

Un'equazione reciproca di quarto grado di II^a specie è un'equazione che, ridotta a forma normale, è del tipo: $ax^4+bx^3-bx-a=0$. Essa ammette sempre almeno le soluzioni $x_{1,2}=\pm1$.

Per risolvere una tale equazione occorre:

a. scomporre l'equazione in fattori *(Raccoglimento a fattor comune parziale oppure Metodo di Ruffini)*
b. applicare la legge dell'annullamento del prodotto

Esempio

$3x^4-15x^3+15x-3=0$

Metodo 1

Si applica il Metodo di Ruffini, con $x=1$:

	3	−15	0	15	−3
1		+3	−12	−12	+3
	3	−12	−12	3	=

l'equazione si scompone in :

$(x-1)\cdot(3x^3-12x^2-12x+3)=0;$

Si applica, di nuovo, il Metodo di Ruffini, con $x=-1$:

	3	−12	−12	+3
−1		−3	+15	−3
	3	−15	+3	=

l'equazione si scompone in :

$(x-1)\cdot(x+1)\cdot(3x^2-15x+3)=0;$ $\quad x-1=0$; $x+1=0$; $3x^2-15x+3=0$ $\quad \boxed{x_1=1 \quad x_2=-1}$

$3x^2-15x+3=0;\quad \Delta=225-36=189;\quad x_{3,4}=\dfrac{15\pm\sqrt{189}}{6}=\dfrac{15\pm3\sqrt{21}}{6}=\boxed{\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}}$

Metodo 2

$3x^4-15x^3+15x-3=0$

Si raccolgono i coefficienti dei termini estremi e di quelli equidistanti dagli estremi :

$3\cdot(x^4-1)-15x\cdot(x^2-1)=0;\qquad 3\cdot(x^2+1)\cdot(x^2-1)-15x\cdot(x^2-1)=0;$

$(x^2-1)\cdot[3\cdot(x^2+1)-15x]=0;\qquad (x^2-1)\cdot[3x^2+3-15x]=0;$

$(x^2-1)\cdot(3x^2-15x+3)=0;\qquad x^2-1=0$; $3x^2-15x+3=0$ $\qquad \boxed{x_{1,2}=\pm1}$

$3x^2-15x+3=0;\quad \Delta=225-36=189;\quad x_{3,4}=\dfrac{15\pm\sqrt{189}}{6}=\dfrac{15\pm3\sqrt{21}}{6}=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

Equazioni reciproche di V° grado di I^a specie

Un'equazione reciproca di quinto grado di I^a specie è un'equazione che, ridotta a forma normale, è del tipo: $ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$. Essa ammette sempre almeno la soluzione $x = -1$

Per risolvere una tale equazione occorre:

a. scomporre l'equazione in fattori di I° e II° grado
b. applicare la legge dell'annullamento del prodotto

Esempio

$3x^5 - 12x^4 - 9x^3 - 9x^2 - 12x + 3 = 0$

Si applica il metodo di Ruffini e si ottiene:

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & 3 & -12 & -9 & -9 & -12 & +3 \\ -1 & & -3 & +15 & -6 & +15 & -3 \\ \hline & 3 & -15 & +6 & -15 & +3 & = \end{array}$$

$(x+1)\cdot(3x^4 - 15x^3 + 6x^2 - 15x + 3) = 0$; $\quad x + 1 = 0 \quad \boxed{x_1 = -1}$

$3x^4 - 15x^3 + 6x^2 - 15x + 3 = 0$

La seconda equazione è un'equazione reciproca di IV° grado

di I° specie, già risolta precedentemente e che da le soluzioni: $\boxed{x_{3,4} = \pm i}$ $\boxed{x_{4,5} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}}$

Equazioni reciproche di V° grado di II^a specie

Un'equazione reciproca di quinto grado di II^a specie è un'equazione che, ridotta a forma normale, è del tipo: $ax^5 + bx^4 + cx^3 - cx^2 - bx - a = 0$. Essa ammette sempre almeno la soluzione $x = +1$

Per risolvere una tale equazione occorre:

a. scomporre l'equazione in fattori di I° e II° grado
b. applicare la legge dell'annullamento del prodotto

Esempio

$3x^5 - 18x^4 + 21x^3 - 21x^2 + 18x - 3 = 0$

Si applica il metodo di Ruffini e si ottiene:

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & 3 & -18 & +21 & -21 & +18 & -3 \\ +1 & & +3 & -15 & +6 & -15 & +3 \\ \hline & 3 & -15 & +6 & -15 & +3 & = \end{array}$$

$(x-1)\cdot(3x^4 - 15x^3 + 6x^2 - 15x + 3) = 0$; $\quad x - 1 = 0 \quad \boxed{x_1 = +1}$

$3x^4 - 15x^3 + 6x^2 - 15x + 3 = 0$

La seconda equazione è un'equazione reciproca di IV° grado

di I° specie, già risolta precedentemente e che da le soluzioni: $\boxed{x_{3,4} = \pm i}$ $\boxed{x_{4,5} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}}$

Equazioni di grado superiore al II° generiche

Una generica equazione di grado superiore al II° è un'equazione che non rientra nella casistica esaminata precedentemente.

Per risolvere una tale equazione occorre:

a. scomporre l'equazione in fattori di I° e II° grado
b. applicare la legge dell'annullamento del prodotto

Esempio

$$6x^7 - 51x^6 + 114x^5 - 45x^4 = 0$$

$$6x^7 - 51x^6 + 114x^5 - 45x^4 = 0\,;$$

$$2x^4 \cdot \left(2x^3 - 17x^2 + 38x - 15x\right) = 0$$

	2	−17	+38	−15
$\frac{1}{2}$		+1	−8	+15
	2	−16	+30	=

Si applica il Metodo di Ruffini:

Si trovano i divisori del termine noto $D_{15} = \{\pm1, \pm3, \pm5, \pm15\}$

Si trovano i divisori del I° coefficiente $D_2 = \{\pm1, \pm2\}$

Si trovano tutte le combinazioni di frazioni con i divisori del termine noto al numeratore, e i divisori del I° coefficiente a denominatore $D_{\frac{N}{D}} = \left\{\pm1, \pm\frac{1}{2}, \pm3, \pm\frac{3}{2}, \pm5, \pm\frac{5}{2}, \pm15, \pm\frac{15}{2}\right\}$

L'equazione pertanto si scompone :

$$2x^4 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(2x^2 - 16x + 30\right) = 0\,; \qquad \begin{array}{l} 2x^4 = 0 \\ x - \frac{1}{2} = 0 \\ 2x^2 - 16x + 30 = 0 \end{array} \qquad \boxed{\begin{array}{l} x_{1,2,3,4} = 0 \\ x_5 = \frac{1}{2} \end{array}}$$ ***(contato 4 volte)***

$$\left(2x^2 - 16x + 30\right) = 0\,; \qquad \frac{\Delta}{4} = 64 - 60 = 4\,; \qquad x_{6,7} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} = \boxed{\begin{array}{l} x_6 = 3 \\ x_7 = 5 \end{array}}$$

Esempi di risoluzione grafica di equazioni razionali

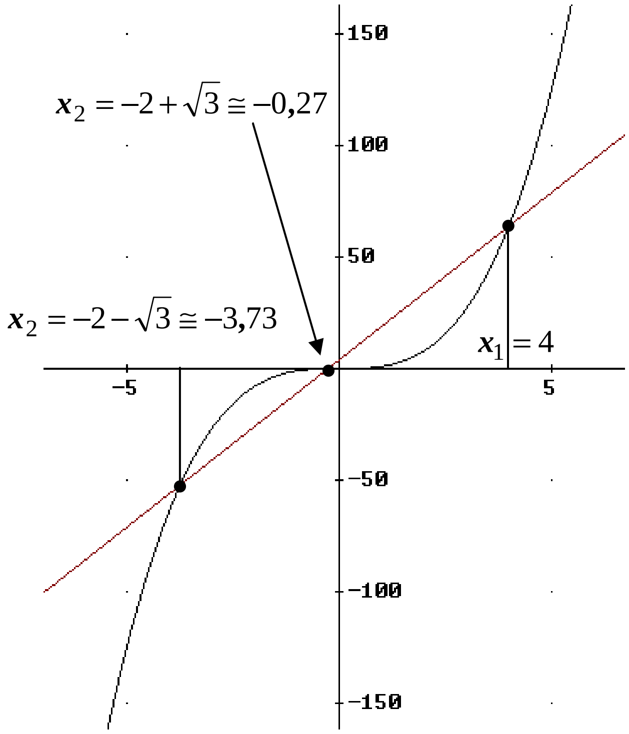
Esempio 1

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

Ponendo $x^3 = y$ si ottiene, al posto dell’equazione, il seguente sistema

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 15x + 4 \end{cases}$$

che risolto graficamente permette di ricavare le soluzioni approssimate dell’equazione di partenza.



Osservazione

Per rappresentare il grafico in modo significativo occorre prendere due unità di misura diverse sui due assi.

$y = x^3$

x	y
-5	-125
-4	-64
-3	-27
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8
3	28
4	64
5	125

$y = 15x - 4$

x	y
-5	-71
5	125

$x^3 + x^2 - 26x + 24 = 0$

Ponendo $x^3 = y$ si ottiene, al posto dell'equazione, il seguente sistema

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = -x^2 + 26x - 24 \end{cases}$$

che risolto graficamente permette di ricavare le soluzioni approssimate dell'equazione di partenza.

<u>Osservazione</u>
Per rappresentare il grafico in modo significativo occorre prendere due unità di misura diverse sui due assi.

$y = x^3$

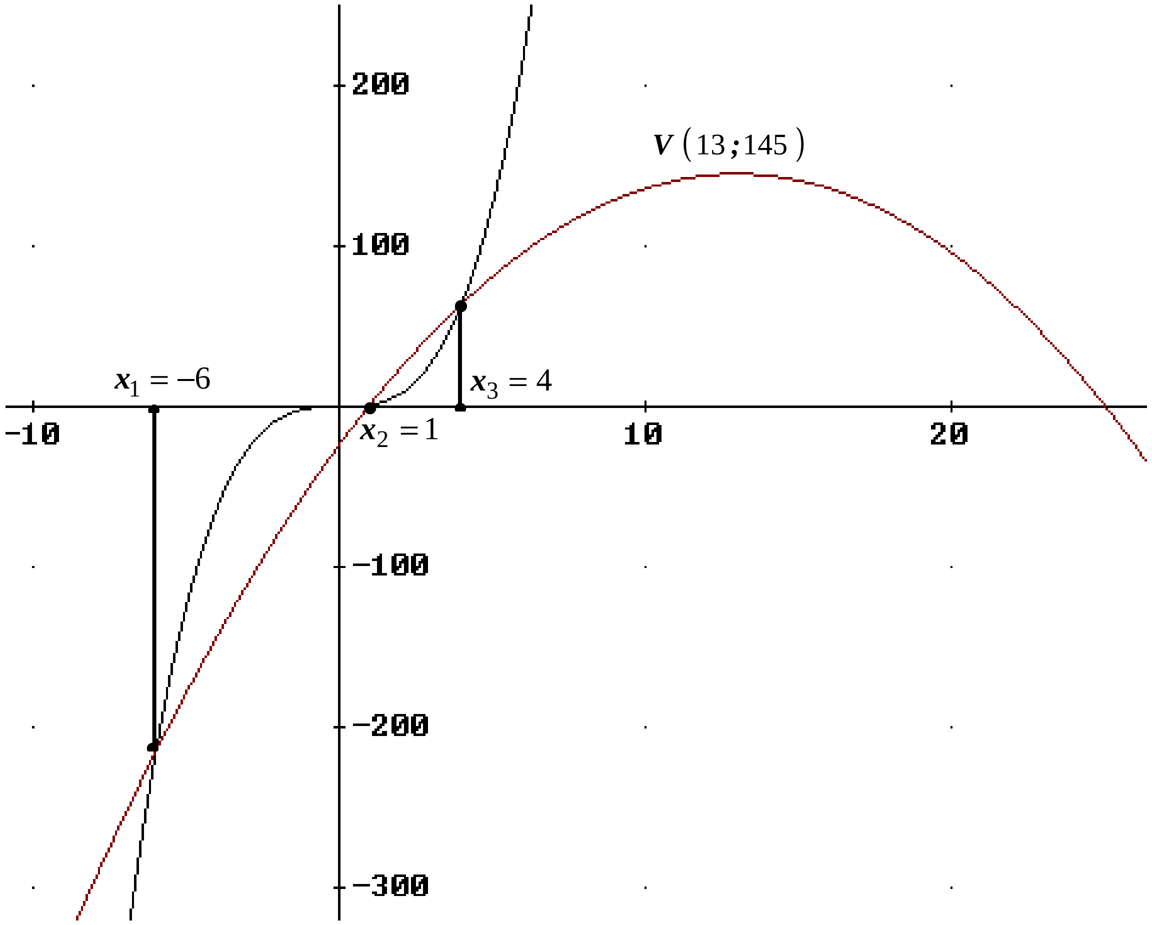
x	y
-5	-125
-4	-64
-3	-27
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8
3	28
4	64
5	125

$y = -x^2 + 26x - 24$

$x_V = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{26}{2\cdot(-1)} = 13$

$y_V = -169 + 338 - 24 = 145$

$V\,(13\,;145)$



Equazioni Irrazionali

Un'equazione ***irrazionale*** è un'equazione in cui l'incognita compare anche come radicando di un radicale.

I° CASO – L'equazione contiene un solo radicale quadratico

Per risolvere una tale equazione occorre:

a. isolare un radicale in un membro
b. elevare ambo i membri al quadrato
c. risolvere l'equazione razionale ottenuta
d. effettuare la verifica obbligatoria delle soluzioni ottenute, sostituendole nell'equazione traccia

Esempio

$$6+\sqrt{x^2+3x-6}=2x$$

Si isola il radicale: $\sqrt{x^2+3x-6}=2x-6$

Si elevano ambo i membri al quadrato: $\left(\sqrt{x^2+3x-6}\right)^2=(2x-6)^2$

Si risolve l'equazione: $x^2+3x-6=4x^2+36-24x$; $3x^2-27x+42=0$; $x^2-9x+14=0$; $x_1=2$ $x_2=7$

Si effettua la verifica obbligatoria delle soluzioni:

Verifica di $x_1=2$ $6+\sqrt{4+6-6}=4$; $6+\sqrt{4}=4$; $6+2=4$; $8=4$

Verifica di $x_2=7$ $6+\sqrt{49+21-6}=14$; $6+\sqrt{64}=14$; $6+8=14$; $14=14$

Pertanto solo la radice $x_2=7$ è una soluzione accettabile dell'equazione.

II° CASO – L'equazione contiene solo radicali quadratici

Per risolvere una tale equazione occorre:

a. isolare un radicale in un membro
b. elevare ambo i membri al quadrato
c. ripetere il procedimento per ogni altro eventuale radicale
d. risolvere l'equazione razionale ottenuta
e. effettuare la verifica obbligatoria delle soluzioni ottenute, sostituendole nell'equazione traccia

Esempio

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}=3$$

Si isola il radicale: $\sqrt{x-2}=3-\sqrt{x+1}$

Si elevano ambo i membri al quadrato: $\left(\sqrt{x-2}\right)^2=\left(3-\sqrt{x+1}\right)^2$

Si risolve l'equazione: $x-2=9+x+1-6\sqrt{x+1}$; $6\sqrt{x+1}=12$; $\sqrt{x+1}=2$; $\left(\sqrt{x+1}\right)^2=2^2$; $x+1=4$; $x=3$.

Si effettua la verifica delle soluzioni:

Verifica $x=3$ $\sqrt{3-2}+\sqrt{3+1}=3$; $1+2=3$; $3=3$.

Pertanto la radice $x=3$ è una soluzione accettabile dell'equazione.