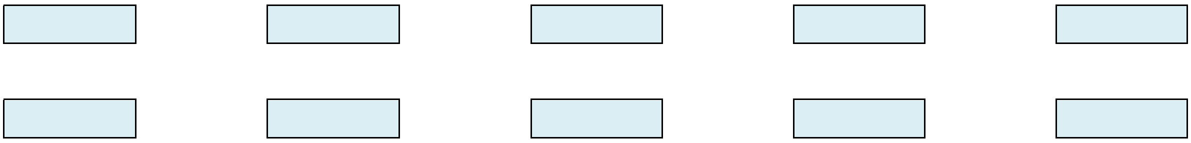
**PROBLEMI CHE HANNO COME MODELLO UN'EQUAZIONE DI I GRADO**

**Problema 1**

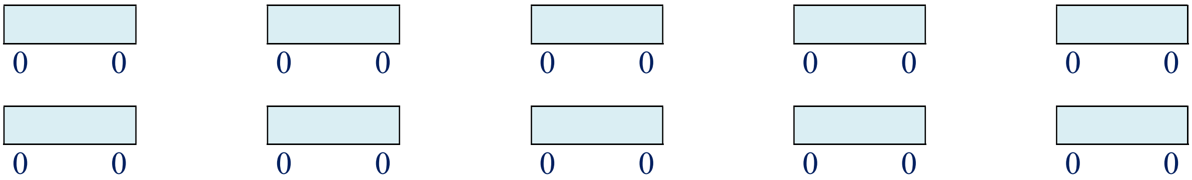
In un parcheggio ci sono 10 veicoli fra auto e moto. Pierino conta che i veicoli hanno in totale 26 ruote. Quante sono le auto e quante sono le moto ?

*<u>1 - Soluzione utilizzando uno schema grafico</u>*

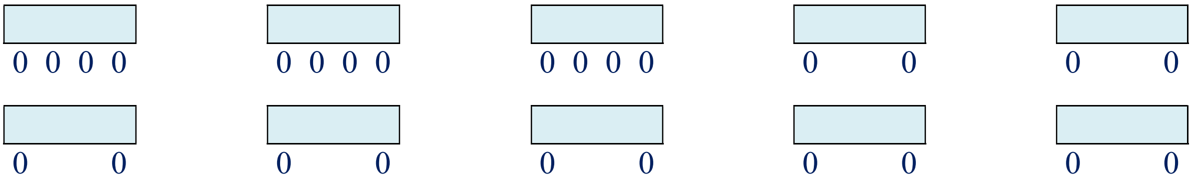
*Disegniamo 10 rettangoli raffiguranti i 10 veicoli.*



*Disegniamo 2 ruote per ogni veicolo.*




*Aggiungiamo le ruote che mancano per arrivare al totale di 26 ruote".*




*"Quante auto e quanto moto ci sono?"*

*Nel parcheggio ci sono 3 auto e 7 moto.*

*<u>2 - Soluzione utilizzando un foglio di calcolo</u>*

*Risolviamo il problema con il seguente foglio di calcolo di Excel.*

| | |
|---|---|
| N° Veicoli | 10 |
| N° Ruote | 26 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N° Moto | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| N° Ruote Moto | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N° Auto | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| N° Ruote Auto | 36 | 32 | 28 | 24 | 20 | 16 | 12 | 8 | 4 | 0 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N° totale ruote | 38 | 36 | 34 | 32 | 30 | 28 | 26 | 24 | 22 | 20 |

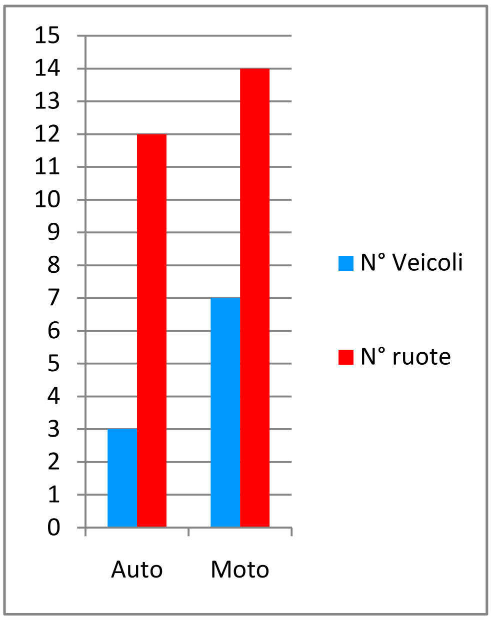
*Risolviamo il problema con il seguente altro foglio di calcolo di Excel.*

*Modificando il valore numerico presente nella cella verde si aggiornano i dati e il grafico.*

| | |
|---|---|
| **N° Veicoli** | **10** |
| Totale Ruote | 26 |

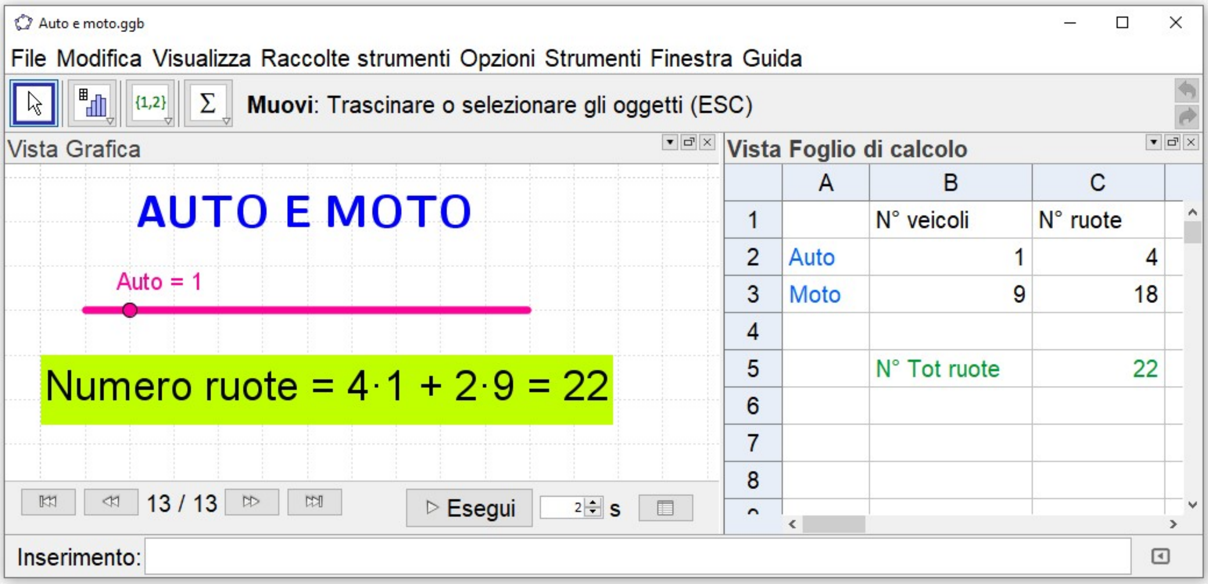
| | Auto | Moto |
|---|---|---|
| N° Veicoli | 3 | 7 |
| N° ruote | 12 | 14 |

| | **A** | **B** | **C** |
|---|---|---|---|
| **1** | **N° Veicoli** | **10** | |
| **2** | Totale Ruote | =B7+C7 | |
| **3** | | | |
| **4** | | Auto | Moto |
| **5** | N° Veicoli | 3 | =B2-B6 |
| **6** | N° ruote | =B6*4 | =C6*2 |




## *3 - Soluzione utilizzando Geogebra*

*Soluzione che utilizza lo slider e il foglio di calcolo presente in Geogebra.*

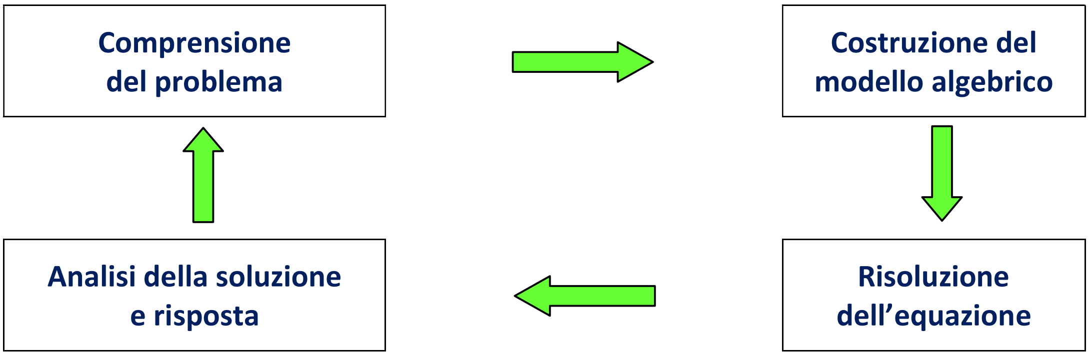



*I file di Excel e di Geogebra sono a disposizione degli studenti su Classroom, per successive esplorazioni e rielaborazioni per la stessa classe di problemi.*

*http://www.mimmocorrado.it/mat/alg/eq/Auto%20e%20moto.xlsx*
*http://www.mimmocorrado.it/mat/alg/eq/Auto%20e%20moto.rar*

*Il modello delle equazioni lineari*

Schema logico per la risoluzione di un problema




*I vari passaggi:*

**1. Comprensione del problema**

*Occorre leggere attentamente il testo del problema e individuare i dati, le relazioni fra i dati e l'obiettivo.*

*La comprensione di un testo è la prima delle capacità da acquisire, in qualsivoglia contesto, al di là del solo ambito matematico. Solo comprendendo in pieno il testo di un problema, riconoscendone chiaramente i dati, le relazioni fra i dati e gli obiettivi, è possibile formalizzarlo matematicamente in modo corretto. Occorre, a volte, stare attenti anche alle sfumature di carattere linguistico che solo una lettura particolarmente attenta può cogliere. La scelta dei tempi verbali, dei generi e perfino della punteggiatura può deviare il corso della risoluzione del problema. Si veda il seguente:*

*Esempio*

*Determiniamo un numero con la seguente proprietà:*

*"La metà del numero, sommata a 10, è uguale alla metà del numero sommata a 10".*

*Ad una lettura non molta attenta e corretta, si potrebbe arrivare alla seguente errata formulazione:*

$$\frac{x+10}{2} = \frac{x+10}{2} \qquad Identità\,.$$

*Una lettura più attenta permette di riconoscere, grazie all'opportuna scelta del genere e della punteggiatura, che la corrispondente equazione è tutt'altro che una identità.*

$$\frac{x}{2} + 10 = \frac{x+10}{2} \quad equazione\ impossibile\,.$$

**2. Costruzione del modello algebrico**

*Essa si articola nelle seguenti tre sottofasi:*

a. *scelta, fra gli elementi non noti, quello da indicare come incognita (la scelta dell'incognita, in generale, non è unica: uno stesso problema può essere risolto in modi diversi, a seconda dell'incognita fissata, e una scelta opportuna può semplificare i calcoli); (vedi "confronto dei diversi svolgimenti-risoluzioni degli alunni")*
b. *individuazione del dominio dell'incognita (per esempio, se indichiamo con x l'età di una persona, dovrà essere $x > 0$);*
c. *costruzione dell'equazione che costituisce il modello del problema (a seconda della scelta dell'incognita, si possono trovare equazioni differenti).*

**3. Risoluzione dell'equazione**

*La risoluzione dell'equazione necessita delle relative competenze di calcolo letterale e dei principi di equivalenza delle equazioni da parte degli studenti..*

**4. Analisi della soluzione e risposta**
*Stabilire se la soluzione dell'equazione è accettabile anche come soluzione del problema.*
*(esempi: se indichiamo con x la misura di un segmento, una soluzione negativa non è accettabile; se indichiamo con x il numero di automobili, una soluzione che non è un numero naturale non è accettabile).*
*Dopo aver stabilito l'accettabilità della soluzione occorre concludere rispondendo alla richiesta del problema.*
*Da osservare inoltre che:*

- *Se l'equazione è impossibile, il problema non ammette soluzioni.*
- *Se l'equazione risulta indeterminata, allora anche il problema è indeterminato (cioè qualsiasi valore dell'incognita è soluzione del problema).*

**Problema 1**

In un parcheggio ci sono 10 veicoli fra auto e moto. Pierino conta che i veicoli hanno in totale 26 ruote. Quante sono le auto e quante sono le moto ?

**1. Comprensione del problema**
*Dopo la lettura del testo, chiedo agli allievi di indicarmi i dati e l'obiettivo.*

| Dati | Obiettivo |
|---|---|
| $\begin{cases} N^\circ\, veicoli = 10 \\ N^\circ\, ruote = 26 \end{cases}$ | *Numero auto = ?*<br>*Numero Moto = ?* |

**2. Costruzione del modello algebrico**
*Essendo l'obiettivo del problema quello di determinare il numero delle auto e delle moto presenti nel parcheggio, poniamo il* $numero\ delle\ auto = x$ .

*Il dominio dell'incognita* $x$ *è* $D = \{x \in N \;/\; 0 < x < 10\}$.

*"Se le auto sono* $x$ *quante sono le moto?* *Risposta:"*$10 - x$".

*Individuiamo quindi l'equazione che costituisce il modello del problema.*

*"Le ruote di tutte le auto + le ruote di tutte le moto"=26 .*

*"Se le auto sono* $x$*, quante ruote ci sono ? "* *Risposta: "*$4 \cdot x$".

*Passo quindi alle moto:*

*"Se le moto sono* $10 - x$*, quante ruote ci sono ? "* *Risposta: "*$2 \cdot (10 - x)$".

*Si arriva quindi a tradurre la relazione precedente:*

*Numero ruote auto + Numero ruote moto* $= 26$ *a*

$4x + 2(10 - x) = 26$ .

**3. Risoluzione dell'equazione**

*Chiamo quindi alla lavagna l'allievo P. a risolvere l'equazione.*

$4x + 2(10 - x) = 26$ ;

$4x + 20 - 2x = 26$ ;

$4x - 2x = 26 - 20$ ;

$2x = 6$ ; $x = 3$ .

**4. Analisi della soluzione e risposta**

$x = 3$ *è una soluzione accettabile?*

*Risposta: "SI, perché rientra nel dominio prima determinato".*

*Concludiamo quindi con la risposta al problema.*

*Nel parcheggio ci sono 3 auto e 7 moto.*

*Infine verifichiamo che il numero totale delle ruote è 26.*

$N° \; ruote \; totale = 4 \cdot (3 \; auto) + 2 \cdot (7 \; moto) = 12 + 14 = 26 \, .$

**Problema 2**

Sommando al cubo di un numero naturale l'opposto della metà del suo consecutivo si ottiene il cubo del suo precedente aumentato del triplo del suo quadrato e diminuito del triplo del suo successivo. Qual è il numero originario?

*Per prima cosa occorre conoscere i vocaboli che compaiono nel testo del problema.*

*A tal proposito cominciamo a costruire un VOCABOLARIO ITALIANO – MATEMATICA che andremo via, via ad ampliare".*

**VOCABOLARIO ITALIANO – MATEMATICA**

| ITALIANO | MATEMATICA |
|---|---|
| Numero | $n$ |
| Doppio del numero | $2n$ |
| Triplo del numero | $3n$ |
| Metà del numero | $\frac{n}{2}$ |
| Terza parte del numero | $\frac{n}{3}$ |
| Opposto del numero | $-n$ |
| Reciproco del numero | $\frac{1}{n}$ |
| Reciproco dell'opposto del numero | $-\frac{1}{n}$ |
| Numero precedente | $n-1$ |
| Numero successivo | $n+1$ |
| Quadrato del numero | $n^2$ |
| Cubo del numero | $n^3$ |
| Somma di due numeri | $n+p$ |
| Differenza di due numeri | $n-p$ |
| Prodotto di due numeri | $n \cdot p$ |
| Quoziente di due numeri | $\frac{n}{p}$ |
| Numero aumentato di una quantità x | $n+x$ |
| Numero diminuito di una quantità x | $n-x$ |
| Numero pari | $2n$ |
| Numero dispari | $2n+1$ |

*Poniamo quindi il numero da trovare* $= x$ ,

*IL dominio dell'incognita è:* $D = N_0$ .

*Leggendo attentamente e traducendo parola per parola il testo del problema in linguaggio algebrico:*

$$Numero^3 + \left(-\frac{consecutivo}{2}\right) = (precedente)^3 + 3 \cdot Numero^2 - 3 \cdot consecutivo$$

*ed in seguito alla formulazione della seguente equazione:*

$$x^3 + \left(-\frac{x+1}{2}\right) = (x-1)^3 + 3x^2 - 3(x+1)\,;$$

$$x^3 - \frac{x+1}{2} = x^3 - 1 - 3x^2 + 3x + 3x^2 - 3x - 3\,;$$

$$-\frac{x+1}{2} = -1 - 3\,;$$

$$-\frac{x+1}{2} = -4\,;$$

$$\frac{x+1}{2} = 4\,;$$

$x + 1 = 8\,;$ $\qquad x = 7\,.$

**4. Verifica dell'accettabilità della soluzione e risposta**

$x = 7$ *è una soluzione accettabile?*

*Risposta: "SI, perché rientra nel dominio prima determinato".*

*Concludiamo quindi con la risposta al problema.*

*Il numero* originario *è 7.*

*VERIFICA*

$$7^3 - \frac{7+1}{2} = 7^3 - 1 - 3\cdot 7^2 + 3\cdot 7 + 3\cdot 7^2 - 3\cdot 7 - 3\,;$$

$343 - 4 = 343 - 1 - 147 + 21 + 147 - 21 - 3\,;$ $\qquad 339 = 343 - 1 - 3\,;$ $\qquad 339 = 339.$

**Problema 402.290**

La divisione intera di 61 per un certo numero naturale dà come quoziente 3 e come resto 10. Qual è il numero?

*Soluzione*

*Aggiungo il seguente suggerimento:*

*Consideriamo la divisione 19 : 5*

*Possiamo scrivere la seguente uguaglianza:* $19 = 5 \cdot 3 + 4$

*Generalizzando si ha:* $Dividendo \;=\; quoziente \cdot Divisore + Resto$

$$\begin{array}{r|l} 19 & 5 \\ \cline{2-2} 15 & 3 \\ \hline 4 & \end{array}$$

*Nel problema in questione si ha la seguente relazione:* $61 = 3 \cdot x + 10\,.$

$-3x = -61 + 10\,;$ $\qquad -3x = -51\,;$ $\qquad 3x = 51\,;$ $\qquad x = 17\,.$

*Verifica*

*Infatti:*

$$\begin{array}{r|l} 61 & 17 \\ \cline{2-2} 51 & 3 \\ \hline 10 & \end{array}$$

*Il VOCABOLARIO viene aggiornato con i seguenti vocaboli:*

**VOCABOLARIO ITALIANO – MATEMATICA**

| ITALIANO | MATEMATICA |
|---|---|
| **Dividendo** | **Il termine che viene diviso** *(I numero della divisione)* |
| **Divisore** | **Il termine per cui si divide il dividendo** *(II numero della divisione)* |
| **Quoziente** | **Risultato della divisione intera** |
| **Resto** | **Resto della divisione intera** |

Problema guidato 403.306
In un numero di due cifre, la cifra delle decine è il doppio di quella delle unità. La differenza tra questo numero e il numero che si ottiene invertendone le cifre è 27. Qual è il numero?

*Soluzione 1*
*Faccio subito notare che l'esercizio si può risolvere provando le coppie di numeri:*

$$21-12=9 \qquad 42-24=18 \qquad 63-36=27 \qquad 84-48=36$$

*Si conclude che il numero cercato è 63 .*

*Soluzione 2*
*Indica con x la cifra delle unità del numero che stiamo cercando (x dovrà essere un numero naturale minore di . . . 5).*

*Una alunna fa notare che x non può essere zero.*

*Quindi il dominio dell'equazione è:* $D=\{x \in N \ / \ 0<x<5\}$ .

*Allora la cifra delle decine è . . . 2x, quindi la forma polinomiale del numero è:* $2x \cdot 10+x$ .

*Il numero che si ottiene invertendo le cifre del numero precedente, scritto in forma polinomiale, è:*

$x \cdot 10+2x$ .

*Ponendo uguale a 27 la differenza tra il numero originario e il numero con le cifre invertite si ottiene l'equazione:* $2x \cdot 10+x-(x \cdot 10+2x)=27$, *che risolta dà* $x= . . . . 3$ .

*La soluzione è accettabile perché . . . .* $3<5$ .

*Si può concludere che il numero cercato è . . . . 63 .*

*Il VOCABOLARIO viene aggiornato con i seguenti vocaboli:*

**VOCABOLARIO ITALIANO – MATEMATICA**

| ITALIANO | MATEMATICA |
|---|---|
| **Cifra** | **Uno dei 10 simboli con cui si rappresentano i numeri** *(Il numero 37 è formato dalle cifre 3 e 7)* |

Problema guidato 403.311

Paolo è nato sei anni prima di Maria e tra due anni l'età di Paolo sarà il doppio di quella di Maria. Che età hanno Paolo e Maria?

*Soluzione*

*Individuiamo i dati e l'obiettivo.*

$$\begin{cases} Età\ Paolo = Età\ Maria + 6 \\ (Età\ Paolo)_{Fra\ 2\ anni} = 2 \cdot (Età\ Maria)_{Fra\ 2\ anni} \end{cases}$$

$Età\ Paolo = ?$

$Età\ Maria = ?$

*Indichiamo l'età attuale di Maria* $= x$

*Il dominio dell'incognita* $x$ *è* $N_0$ .

*L'età attuale di Paolo* $= x + 6$ .

*Tra due anni, l'età di Maria sarà* $x + 2$ *e l'età di Paolo sarà* $(x + 6) + 2$ .

*Anche se si tratta di problema guidato per rendere più chiara la situazione problematica disegniamo la seguente tabella:*

| Età attuale | |
|---|---|
| Età di Maria | $x$ |
| Età di Paolo | $x + 6$ |

| Età fra due anni | |
|---|---|
| Età di Maria | $x + 2$ |
| Età di Paolo | $(x + 6) + 2$ |

*Il testo del problema afferma che:*

*"Tra due anni l'età di Paolo sarà il doppio di quella di Maria".*

*Utilizzando un linguaggio misto Italiano/matematico si ha:*

$(Età\ Paolo)_{Fra\ 2\ anni} = 2 \cdot (Età\ Maria)_{Fra\ 2\ anni}$

*Che viene tradotta nell'equazione:*

$(x + 6) + 2 = 2 \cdot (x + 2)$ ;

$x + 6 + 2 = 2x + 4$ ;

$x - 2x = -6 - 2 + 4$ ;

$-x = -4$ ;

$x = 4$ .

*La soluzione soddisfa il dominio D dell'equazione.*

*Pertanto le età attuali di Maria e Paolo sono:*

*Età di Maria = 4 anni e l'età di Paolo = 10 anni.*

*La Verifica conferma questo risultato.*

| Età attuale | |
|---|---|
| Età di Maria | $4$ |
| Età di Paolo | $4 + 6 = 10$ |

| Età fra due anni | |
|---|---|
| Età di Maria | $4 + 2 = 6$ |
| Età di Paolo | $(4 + 6) + 2 = 12$ |

Esercizio 402.325.a

Si vuole formare la somma di 8 euro utilizzando 25 monete, alcune da 20 centesimi e altre da 50 centesimi. Quante monete da 20 centesimi e quante da 50 centesimi occorrono?

*Soluzione*

$$\begin{cases} Somma = 8\,€ \\ N°\,Monete\ da\ 20\ cent + N°\,Monete\ da\ 50\ cent = 25 \end{cases} \qquad \begin{matrix} N°\,Monete\ da\ 20\ cent. = ? \\ N°\,Monete\ da\ 50\ cent. = ? \end{matrix}$$

*Innanzitutto trasformiamo la* $Somma = 8\,€ = 800\ centesimi\ di\ euro$

*Poniamo il* $N°\,Monete\ da\ 20\ cent. = x$, $\quad il\ cui\ dominio\ è\ \ D = \{x \in N\ /\ \ 0 < x < 25\}$

*Otteniamo che:* $\ N°\,Monete\ da\ 50\ cent. = 25 - x$

*La relazione che interpreta la traccia è la seguente:*

*Somma costituita dalle monete da 20 cent + Somma costituita dalle monete da 50 cent = 800*

*In maniera più dettagliata diventa:*

$N°\,monete\ da\ 20\ cent \cdot 20 + N°\,monete\ da\ 50\ cent \cdot 50 = 800$

*che da origine alla formulazione della seguente equazione:*

$20 \cdot x + 50 \cdot (25 - x) = 800$ ;

$20x + 1250 - 50x = 800$ ;

$20x - 50x = 800 - 1250$ ;

$-30x = -450$ ;

$30x = 450$ ;

$\frac{30x}{30} = \frac{450}{30}$ ;

$x = 15$ .

$Pertanto\ il\ numero\ di\ \ monete\ da\ 20\ cent. = 15$ ;

$mentre\ il\ numero\ di\ \ monete\ da\ 50\ cent. = 25 - 15 = 10$ .

*Si conclude che per formare la somma di 8 euro occorrono 15 monete da 20 centesimi e 10 monete da 50 centesimi.*

*Effettuiamo la verifica:* $\ 20 \cdot 15 + 50 \cdot (25 - 15) \ = \ 300 + 50 \cdot 10 \ = \ 800$ .

Esercizio 402.325.b

Si vuole formare la somma di 8 euro utilizzando 20 monete, alcune da 20 centesimi e altre da 50 centesimi. Quante monete da 20 centesimi e quante da 50 centesimi occorrono?

*Soluzione*

$$\begin{cases} Somma = 8\,€ \;=\; 800\,centesimi \\ N°\,Monete\ da\ 20\ cent + N°\,Monete\ da\ 50\ cent = 20 \end{cases} \qquad \begin{matrix} N°\,Monete\ da\ 20\ cent. = ? \\ N°\,Monete\ da\ 50\ cent. = ? \end{matrix}$$

*Poniamo il* $N°\,Monete\ da\ 20\ cent. = x$ *il cui dominio è* $D = \{x \in N \ / \ 0 < x < 20\}$

*Si ottiene:* $N°\,Monete\ da\ 50\ cent. = 20 - x$

*Si perviene alla seguente equazione:*

$20 \cdot x + 50 \cdot (20 - x) = 800$ ;

$20x + 1000 - 50x = 800$ ;

$20x - 50x = 800 - 1000$ ;

$-30x = -200$ ;

$30x = 200$ ;

$\frac{30x}{30} = \frac{200}{30}$ ;

$x = \frac{20}{3}$

*La soluzione non è accettabile perché non appartiene al dominio D.*

*Quindi il problema non ha soluzioni".*

Esercizio 402.329

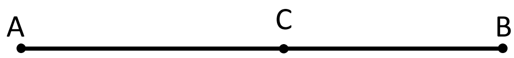
Un’auto, su un’autostrada, parte da un casello A a un certo istante, verso il casello B che dista 280 km da A; dopo 10 minuti, dal casello B parte una seconda auto che si muove in verso opposto al precedente (cioè verso il casello A). Le due auto viaggiano a una velocità che si può considerare mediamente costante e uguale a 130 km all’ora per la prima auto e di 120 km all’ora per la seconda; dopo quanto tempo dalla sua partenza la prima auto incontrerà la seconda?

*Soluzione*

$$\begin{cases} Spazio = 280\ km \\ Velocità_{A\to B} = 130\ km/h \\ Velocità_{B\to A} = 120\ km/h \\ Tempo_{A\to B} = Tempo_{B\to A} + 10' \end{cases} \qquad Tempo_{A\to B} = ?$$

*Essendo il tempo espresso sia in minuti sia in ore, occorre trasformare nella stessa unità di misura.*

*Pertanto trasformiamo* $t = 10' = \left(\frac{10}{60}\right)^h = \left(\frac{1}{6}\right)^h$.




*Poniamo il tempo che impiega la prima auto per incontrare la seconda* $= x$ ,  $x > \frac{1}{6}$.

*Il tempo che impiega la seconda auto per incontrare la prima* $= x - \left(\frac{1}{6}\right)^h$ .

*Quando le due auto si incontrano lo spazio totale percorso dalle due auto è di 280 km.*

*Pertanto si ha:* $Spazio_{A\to B} + Spazio_{B\to A} = 280\ km$ ;

*Dalla relazione:* $velocità = \frac{spazio}{tempo}$ *si ricava la relazione* $spazio = velocità \cdot tempo$ .

*Riprendendo la relazione:* $Spazio_{A\to B} + Spazio_{B\to A} = 280\ km$ *si ottiene:*

$velocità_{A\to B} \cdot tempo_{A\to B} + velocità_{B\to A} \cdot tempo_{B\to A} = 280$ ;

$$130 \cdot x + 120 \cdot \left(x - \frac{1}{6}\right) = 280 \ ;$$

$$130x + 120x - 20 = 280 \ .$$

$$250x = 300 \ .$$

$$\frac{250}{250}x = \frac{300}{250} \ .$$

$$x = \frac{6}{5} \ .$$

$$x = \left(\frac{6}{5}\right)^h = (1{,}2)^h = 1^h + 0{,}2^h = 1^h + (0{,}2 \cdot 60)^h = 1^h \ 12' \ .$$

*In conclusione, il tempo che impiega la prima auto per incontrare la seconda è di* $1^h\ 12'$.

Esercizio 402.337

Il prezzo di un paio di pantaloni, dopo aver subito un rialzo del 10%, è di 121 euro. Qual era il prezzo dei pantaloni prima del rialzo?

*Soluzione*

$$\begin{cases} Prezzo\ pantaloni\ dopo\ rialzo = 121€ \\ Percentuale\ di\ aumento = 10\% \end{cases} \qquad Prezzo\ originario\ pantaloni = ?$$

*Poniamo il Prezzo originario dei pantaloni* $= x$ , $\quad D = \{x \in Q \ / \ 0 < x < 121\}$ .

$x + 10\%x = 121$ ;

$x + \frac{10}{100}x = 121$ ;

$x + \frac{1}{10}x = 121$ ;

$10x + x = 1210$ ;

$11x = 1210$ ;

$\frac{11}{11}x = \frac{1210}{11}$ ;

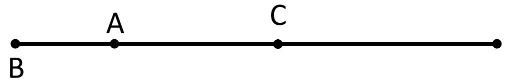
$x = 110$ .

*Pertanto il prezzo dei pantaloni prima del rialzo è di 110 €* .

*Verifica:* $110 + 10\% \cdot 110 \ = \ 110 + 11 \ = \ 121$ .

Problema

Un treno A parte da una stazione e viaggia alla velocità costante di 120 $km/h$. Un'ora dopo dalla stessa stazione parte un treno B, che viaggia nella stessa direzione e verso alla velocità costante di 170 $km/h$ . Dopo quanto tempo il treno B raggiunge il treno A ? A che distanza dalla stazione di partenza avviene il contatto ?




<u>*Soluzione*</u>

$$\begin{cases} v_A = 120\ km/h \\ v_B = 170\ km/h \\ t_B = t_A - 1^h \end{cases} \qquad \begin{matrix} t_B = ? \\ \\ s_B = ? \end{matrix}$$

*Poniamo il tempo che impiega il treno B per raggiungere il treno A:* $t_B = x$ , $\quad x > 0$ .

*Essendo il treno A partito un'ora prima, nell'istante in cui viene raggiunto dal treno B è in viaggio da* $t_A = x + 1$ *ore.*

*Nel momento del raggiungimento, i due treni hanno percorso lo stesso spazio s.*

*Cioè:* $S_A = S_B$

*Dalla relazione:* $velocità = \frac{spazio}{tempo}$ *si ricava la relazione:* $spazio = velocità \cdot tempo$ .

*Sostituendo nella relazione* $S_A = S_B$ *si ha:*

$v_A \cdot t_A = v_B \cdot t_B$ ;

$120 \cdot (x + 1) = 170 \cdot x$ ;

$120x + 120 = 170x$ ;

$120x - 170\,x = -120$ ;

$-50x = -120$ ;

$50x = 120$ ;

$\frac{50x}{50} = \frac{120}{50}$ ;

$x = \frac{12}{5}$ .

Pertanto il treno B raggiunge il treno A dopo un tempo:

$$t_B = \left(\frac{12}{5}\right)^h = 2{,}4^h = 2^h + 0{,}4^h = 2^h + (0{,}4 \cdot 60)^I = 2^h\, 24^I .$$

$2{,}4^h = 2^h + 0{,}4^h = 2^h + (0{,}4 \cdot 60)' = 2^h + 24'$

*Lo spazio percorso è:*

$s_B = v_B \cdot t_B = (170\ km/h) \cdot \left(2{,}4^h\right) = 408\ Km$ .

$s_A = v_A \cdot t_A = (120\ km/h) \cdot \left(3{,}4^h\right) = 408\ Km$ .

Esercizio 404.319

Una compagnia telefonica A fa pagare un canone mensile fisso di 10 euro a cui va aggiunto un costo di 8 centesimi per ogni minuto di conversazione. Un'altra compagnia B fa pagare un canone mensile fisso di 15 euro a cui va aggiunto un costo di 6 centesimi per ogni minuto di conversazione. Quanti minuti si dovrebbe conversare in un mese per pagare la stessa cifra sia con l'una che con l'altra compagnia?

Affronta il problema secondo tre approcci diversi.

a. Approccio grafico.
Scrivi le espressioni analitiche delle funzioni f (x) e g (x) che esprimono il costo complessivo mensile che occorre sostenere rispettivamente con la prima e la seconda compagnia, in funzione del numero x di minuti di conversazione. Traccia con GeoGebra i grafici delle due funzioni e confrontali.

b. Approccio numerico.
Realizza con il foglio di calcolo di GeoGebra una tabella dove:
– nella prima colonna siano riportati i minuti di conversazione (espressi da un numero intero, fino a un massimo di 500 minuti);
– nella seconda e nella terza colonna siano riportati, in corrispondenza di ciascuna riga, i corrispondenti costi mensili da sostenere rispettivamente con la prima e la seconda compagnia.
Rispondi alla domanda posta dal problema, analizzando i dati numerici della tabella.
c. Approccio algebrico.
Traduci il problema in un'opportuna equazione e risolvila.

a. Approccio grafico.

*Lo svolgimento secondo questa metodologia viene da me effettuata sulla LIM passo passo, dando il tempo agli alunni per prendere appunti da utilizzare come guida nei prossimi esercizi.*

*Innanzitutto trascrivo i dati del problema in una tabella riassuntiva che evidenzia più chiaramente la situazione problematica.*

| DATI | COMPAGNIA A | COMPAGNIA B |
|---|---|---|
| | Quota fissa 10 euro | Quota fissa 15 euro |
| | 8 cent/min | 6 cent/min |

| OBIETTIVO | |
|---|---|
| | *Spesa Compagnia A* = *Spesa Compagnia B* |

*Poniamo il n° dei minuti* $= x$ *il cui dominio è* $N_0$ .

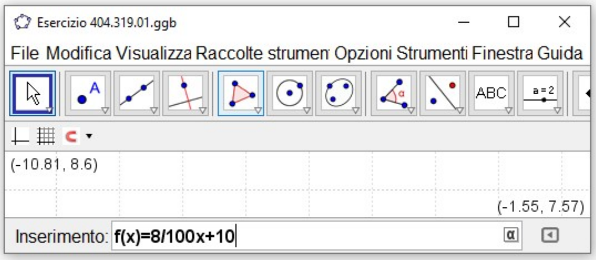
*La funzione costo della prima compagnia A è:* $f(x) = \frac{8}{100}x + 10$

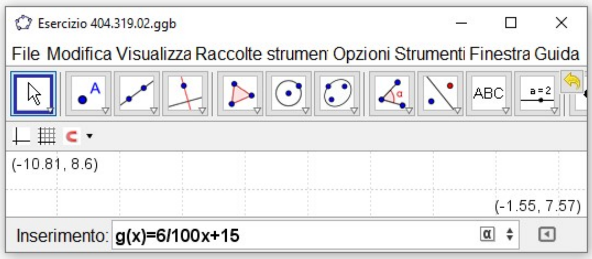
*La funzione costo della seconda compagnia è:* $g(x) = \frac{6}{100}x + 15$

*Utilizzando GeoGebra traccio i grafici delle due funzioni.*

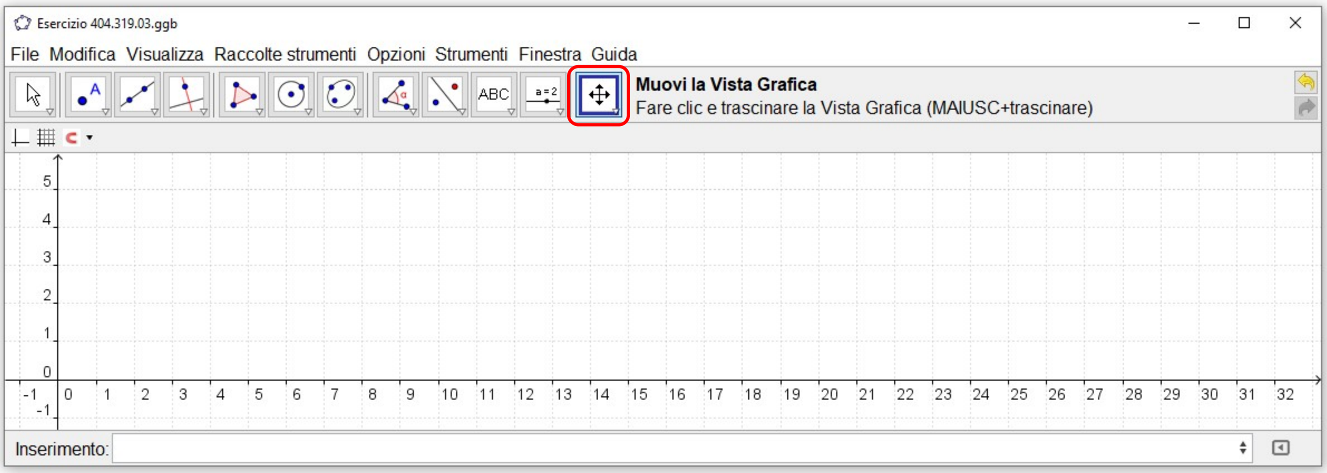
*Inserisco nella barra di inserimento di Geogebra la prima funzione e premo INVIO:*

*Inserisco nella barra di inserimento di Geogebra la seconda funzione e premo INVIO:*



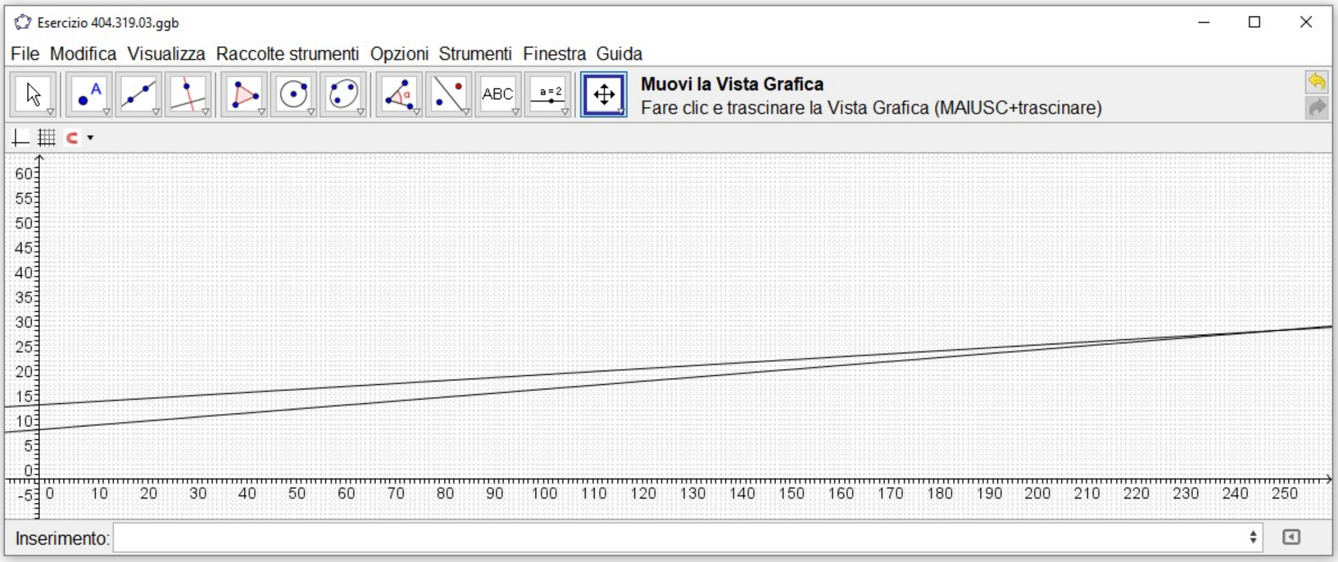




*Dopo aver inserito le due funzioni i grafici non risultano visibili.*



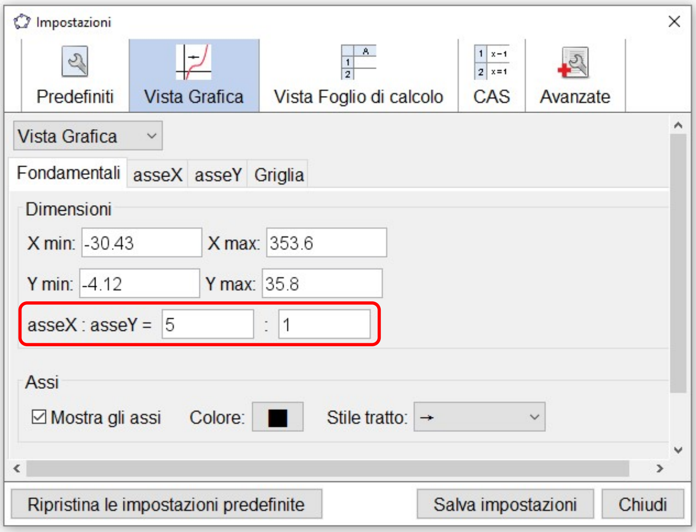

*Utilizzo quindi lo strumento zoom per visualizzarli (muovo la rotellina del mouse)*

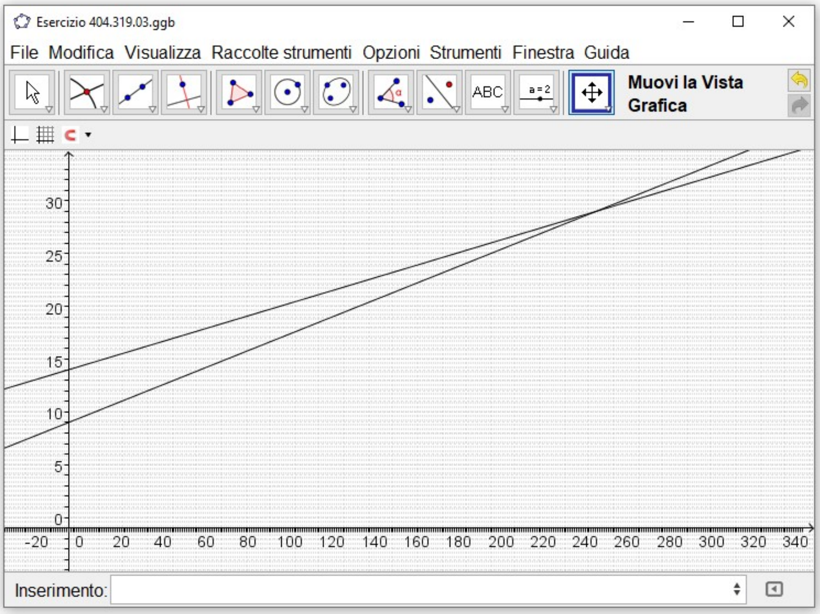
*Utilizzo anche il pulsante <Muovi la Vista Grafica> per centrare il grafico.*

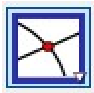



*Per visualizzare meglio il punto di contatto delle due semirette (occorre considerare solo* $x > 0$*) clicco con il tasto destro del mouse sull'asse x e modifico*

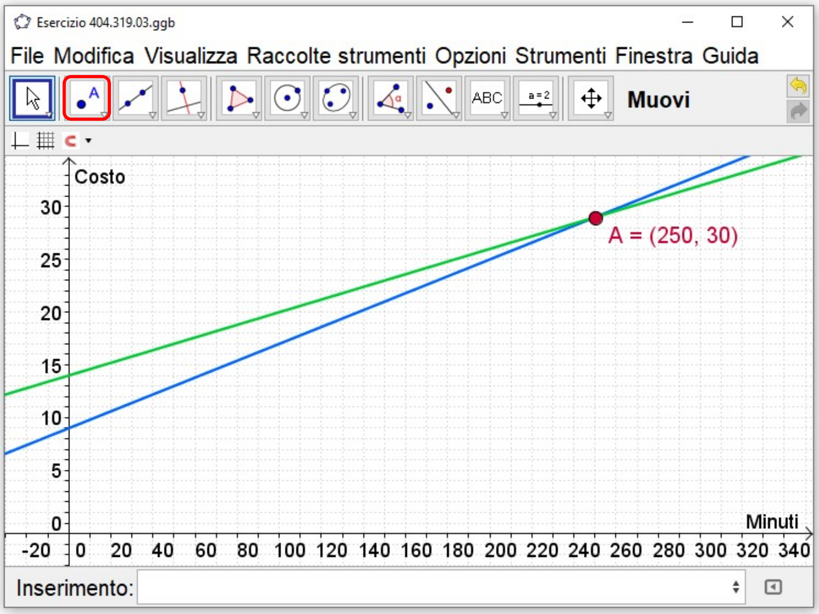
*il rapporto di visualizzazione asse x : asse y da* $1:1$ *a* $5:1$ .



*Per determinare il punto di contatto fra le due rette utilizzo il pulsante "Intersezione di due oggetti"* 

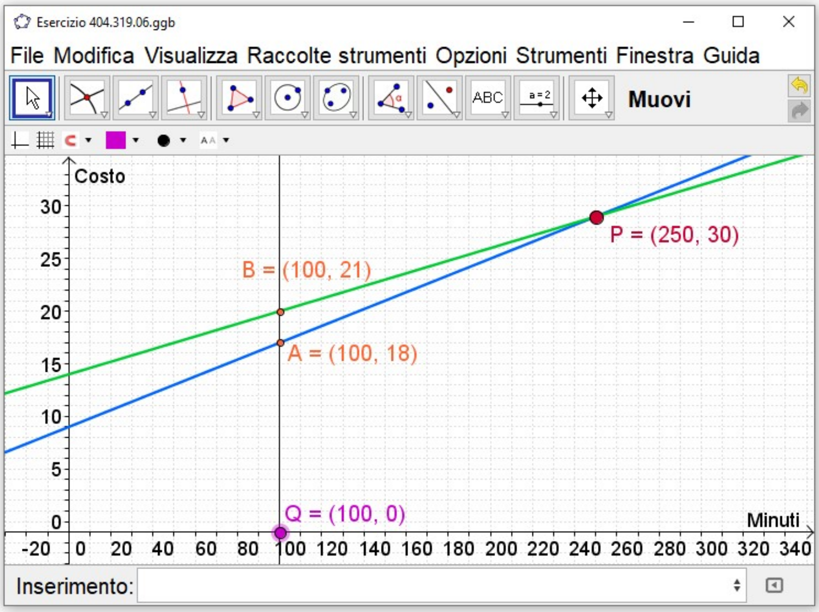
*Per migliorare il grafico cambio il colore delle due rette e del punto di contatto cliccando su di essi con il tasto destro del mouse e selezionando la voce "Proprietà" nel menu contestuale che si apre.*




*Traccio poi una retta perpendicolare all'asse x con il pulsante "Retta perpendicolare" e trovo le intersezioni di questa retta con le due rette precedenti con il pulsante "Intersezione di due oggetti".*

*Faccio osservare ai ragazzi che muovendo questa retta perpendicolare cambiano i costi delle due compagnie telefoniche.*

*Nel grafico a lato, per 100 minuti di conversazione si spendono:*
*18 € con la compagnia A*
*21 € con la compagnia B*




*Per un numero di minuti inferiore a 250 conviene la compagnia A*

*Per un numero di minuti uguale a 250 i costi si equivalgono. Questo punto è detto punto di Indifferenza.*

*Per un numero di minuti superiore a 250 conviene la compagnia B*

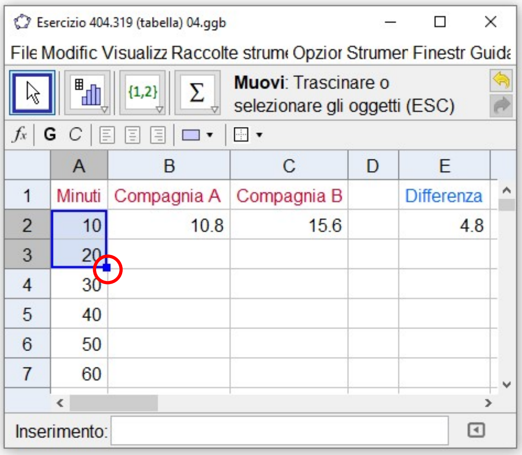
*Il file di Geogebra è a disposizione degli studenti su Classroom, per successive esplorazioni e rielaborazioni per la stessa classe di problemi.*

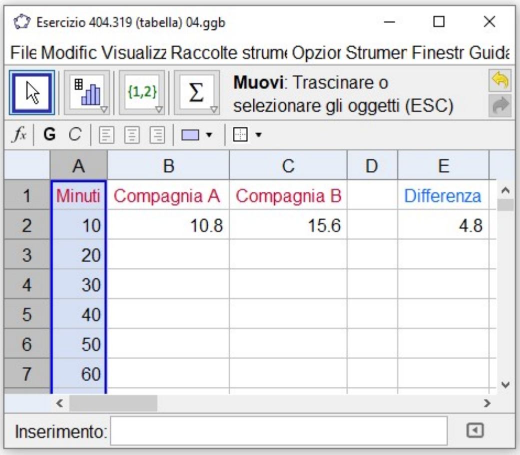
*[http://www.mimmocorrado.it/mat/alg/eq/Esercizio%20404.319%20(Grafico).rar](http://www.mimmocorrado.it/mat/alg/eq/Esercizio%20404.319%20(Grafico).rar)*

b. Approccio numerico.
Realizza con il foglio di calcolo di GeoGebra una tabella dove:
– nella prima colonna siano riportati i minuti di conversazione (espressi da un numero intero, fino a un massimo di 500 minuti);
– nella seconda e nella terza colonna siano riportati, in corrispondenza di ciascuna riga, i corrispondenti costi mensili da sostenere rispettivamente con la prima e la seconda compagnia.
Rispondi alla domanda posta dal problema, analizzando i dati numerici della tabella.

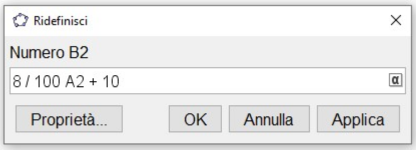
*In questo approccio numerico non seguo pedissequamente il procedimento suggerito dal libro.*
*Per evitare di compilare una tabella con 500 righe, nella prima colonna riporto i minuti di conversazione espressi da numeri multipli del 10, fino a un massimo di 500 minuti, così da ridurre a 50 le righe da compilare.*
*Inserisco nella cella* $A1 \leftarrow Minuti$
*Inserisco nella cella* $B1 \leftarrow Compagnia\ A$
*Inserisco nella cella* $C1 \leftarrow Compagnia\ B$
*Inserisco nella cella* $E1 \leftarrow Differenza$
*Inserisco nella cella* $A2 \leftarrow 10$
*Inserisco nella cella* $A3 \leftarrow 20$
*Seleziono con il mouse le celle A2 e A3*

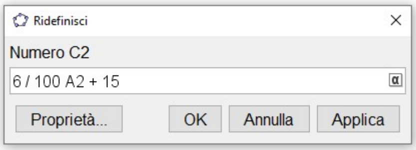
*Clicco sul quadratino che compare in basso a destra della selezione effettuata e trascino il mouse fino alla 51 riga. Geogebra compila per noi il resto della colonna dei minuti fino a 500 minuti.*

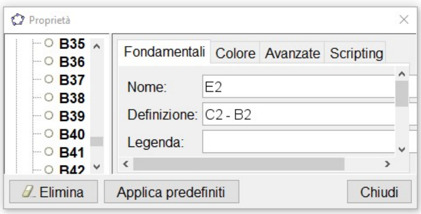



*Inserisco la funzione* $f(x)$ *nella cella* $B2 \leftarrow 8/100 * A2 + 10$
*Inserisco la funzione* $g(x)$ *nella cella* $C2 \leftarrow 6/100 * A2 + 15$
*Inserisco la funzione* $g(x)$ *nella cella* $E2 \leftarrow = C2 - B2$



*Seleziono con il mouse la cella B2*

*Clicco sul quadratino che compare in basso a destra della selezione effettuata e trascino il mouse fino alla 51 riga. Geogebra compila per noi il resto della funzione $f(x)$ della Compagnia A fino alla 51 riga.*

*Seleziono con il mouse la cella C2*

*Clicco sul quadratino che compare in basso a destra della selezione effettuata e trascino il mouse fino alla 51 riga. Geogebra compila per noi il resto della funzione $g(x)$ della Compagnia B fino alla 51 riga.*

*Seleziono con il mouse la cella E2*

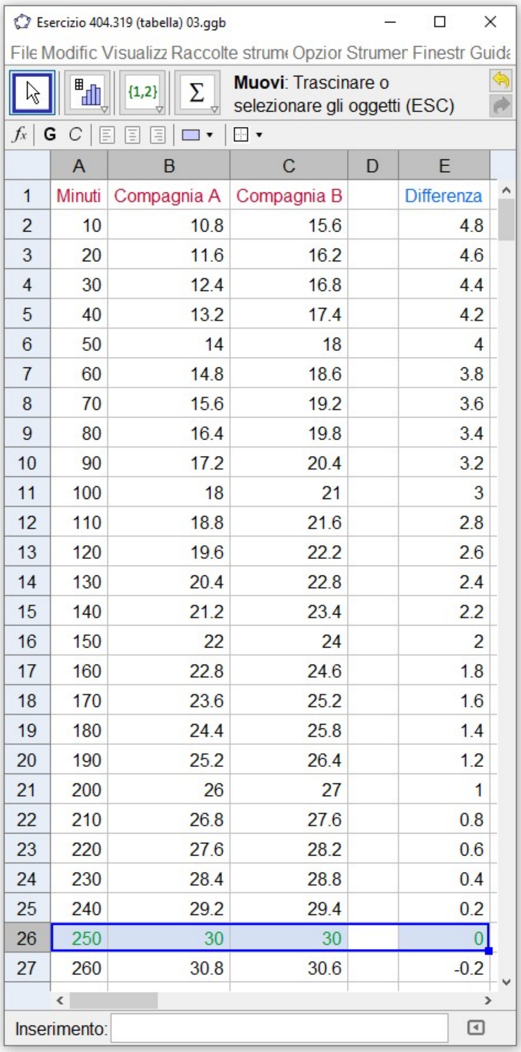
*Clicco sul quadratino che compare in basso a destra della selezione effettuata e trascino il mouse fino alla 51 riga. Geogebra compila per noi il resto della formula in essa contenuta fino alla 51 riga.*

*Dall'analisi della tabella si ricava che:*

*Per un numero di minuti inferiore a 250 conviene la compagnia A*

*Per un numero di minuti uguale a 250 i costi si equivalgono. Questo punto è detto punto di Indifferenza o di pareggio.*

*Per un numero di minuti superiore a 250 conviene la compagnia B*



| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Minuti | Compagnia A | Compagnia B | | Differenza |
| 2 | 10 | 10.8 | 15.6 | | 4.8 |
| 3 | 20 | 11.6 | 16.2 | | 4.6 |
| 4 | 30 | 12.4 | 16.8 | | 4.4 |
| 5 | 40 | 13.2 | 17.4 | | 4.2 |
| 6 | 50 | 14 | 18 | | 4 |
| 7 | 60 | 14.8 | 18.6 | | 3.8 |
| 8 | 70 | 15.6 | 19.2 | | 3.6 |
| 9 | 80 | 16.4 | 19.8 | | 3.4 |
| 10 | 90 | 17.2 | 20.4 | | 3.2 |
| 11 | 100 | 18 | 21 | | 3 |
| 12 | 110 | 18.8 | 21.6 | | 2.8 |
| 13 | 120 | 19.6 | 22.2 | | 2.6 |
| 14 | 130 | 20.4 | 22.8 | | 2.4 |
| 15 | 140 | 21.2 | 23.4 | | 2.2 |
| 16 | 150 | 22 | 24 | | 2 |
| 17 | 160 | 22.8 | 24.6 | | 1.8 |
| 18 | 170 | 23.6 | 25.2 | | 1.6 |
| 19 | 180 | 24.4 | 25.8 | | 1.4 |
| 20 | 190 | 25.2 | 26.4 | | 1.2 |
| 21 | 200 | 26 | 27 | | 1 |
| 22 | 210 | 26.8 | 27.6 | | 0.8 |
| 23 | 220 | 27.6 | 28.2 | | 0.6 |
| 24 | 230 | 28.4 | 28.8 | | 0.4 |
| 25 | 240 | 29.2 | 29.4 | | 0.2 |
| 26 | 250 | 30 | 30 | | 0 |
| 27 | 260 | 30.8 | 30.6 | | -0.2 |

*Il file di Geogebra è a disposizione degli studenti su Classroom, per successive esplorazioni e rielaborazioni per la stessa classe di problemi.*

[*http://www.mimmocorrado.it/mat/alg/eq/Esercizio%20404.319%20(Tabella).rar*](http://www.mimmocorrado.it/mat/alg/eq/Esercizio%20404.319%20(Tabella).rar)

c. Approccio algebrico.

*Pagare la stessa cifra sia con l'una che con l'altra compagnia si traduce nella seguente relazione:*

$Costo\ della\ compagnia\ A = \ Costo\ della\ compagnia\ B$ ;

*Ponendo il numero dei minuti di conversazione* $= x$ *con dominio* $D = N_0$ *,*

*si ottiene la seguente equazione:*

$\frac{8}{100}x + 10 = \frac{6}{100}x + 15$ ;

$8x + 1000 = 6x + 1500$ ;

$8x - 6x = 1500 - 1000$ ;

$2x = 500$ ;

$x = 250$ .

*Pertanto si paga la stessa cifra con l'una che con l'altra compagnia se si conversa per 250 minuti al mese.*